

KALKULUS 2

TIM PENYUSUN

Ersam Mahendrawan, S.Pd., M.Pd.

Ihat Solihat, S.Si., M.Sc.

Sulanjari, S.Si., M.Sc.

Agustina Dyah Setyowati, S.Si., M.Sc.



Jl. Surya Kencana No. 1 Pamulang
Gd. A, Ruang 211 Universitas Pamulang
Tangerang Selatan – Banten

KALKULUS 2

Penulis:

Ersam Mahendrawan, S.Pd., M.Pd.

Ihat Solihat, S.Si., M.Sc.

Sulanjari, S.Si., M.Sc.

Agustina Dyah Setyowati, S.Si., M.Sc.

ISBN: 978-602-5867-36-1

Editor:

Syaiful Bakhri, M.Eng. Sc., Ph.D.

Penyunting:

Desain Sampul:

Ubaid Al Faruq, M.Pd.

Tata Letak:

Aden, S.Si., M.Pd.

Penerbit:

Unpam Press

Redaksi:

Jl. Surya Kencana No. 1

Pamulang – Tangerang Selatan

Telp. 021 7412566

Fax. 021 74709855

Email : unpampress@unpam.ac.id

Cetakan pertama, 14 Oktober 2019

Hak cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan cara apapun tanpa ijin penerbit

DATA PUBLIKASI UNPAM PRESS

I Lembaga Pengembangan Pendidikan dan Pembelajaran Universitas Pamulang

Gedung A. R.211 Kampus 1 Universitas Pamulang

Jalan Surya Kencana No.1, Pamulang Barat, Tangerang Selatan, Banten.

Website : www.unpam.ac.id **I email :** unpampress@unpam.ac.id

Kalkulus 2 / Ersam Mahendrawan,S.Pd.,M.Pd., Ihat Solihat,S.Si.,M.Sc.,
Sulanjari,S.Si.,M.Sc., dan Agustina Dyah Setyowati,S.Si.,M.Sc. -1sted.

ISBN 978-602-5867-36-1

1. Kalkulus 2 I. Ersam Mahendrawan II. Ihat Solihat III. Sulanjari IV.
Agustina Dyah Setyowati

M052-14102019-01

Ketua Unpam Press : Sewaka

Koordinator Editorial : Aeng Muhidin, Ali Madinsyah

Koordinator Bidang Hak Cipta : Susanto

Koordinator Produksi : Pranoto

Koordinator Publikasi dan Dokumentasi : Ubaid Al Faruq

Desain Cover : Ubaid Al Faruq

Cetakan pertama, 14 Oktober 2019

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang menggandakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh buku ini dalam bentuk dan dengan cara apapun tanpa ijin penerbit.

KALKULUS 2

IDENTITAS MATA KULIAH

Fakultas	: Teknik
Mata Kuliah/Kode	: Kalkulus 2/
sks	: 3 Sks
Prasyarat	: Kalkulus 1
Deskripsi Mata Kuliah	: Mata kuliah Kalkulus 2 merupakan mata kuliah Wajib Fakultas Teknik rumpun matematika yang diberikan pada semester 2 yang membahas tentang dasar integral, Aturan Substitusi Integral Tak Tentu, Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri, Aturan Substitusi Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri, Integral Tentu Fungsi Aljabar, Integral Tentu Fungsi Aljabar, Integral Tentu Fungsi Trigonometri, Aturan Substitusi Integral Tak Tentu Fungsi Eksponensial, Aturan Substitusi Integral Tentu Fungsi Eksponensial, Integral Fungsi Rasional, Integral Parsial Tak Tentu, Integral Parsial Tak Tentu, Integral Parsial Tentu, luas bidang yang dibatasi fungsi tertentu, dan volume bidang putar. Setelah menyelesaikan mata kuliah ini mahasiswa diharapkan mampu menyelesaikan masalah dan persoalan integral beserta aplikasinya.

Capaian Pembelajaran	: Setelah menyelesaikan matakuliah kalkulus 2, mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan berbagai macam tipe integral, menerapkannya aplikasinya pada luas bidang dan volume bidang putar dengan tepat.
-----------------------------	---

Penyusun	: 1. Ersam Mahendrawan, S.Pd., M.Pd. 2. Ihat Solihat, S.Si., M.Sc. 3. Sulanjari, S.Si., M.Sc. 4. Agustina Dyah Setyowati, S.Si., M.Sc.
-----------------	---

Dekan Fakultas Teknik

Ketua Team Penyusun

Syaiful Bakhri, M.Eng. Sc., Ph.D.
NIDN. 0421127402

Ersam Mahendra, S.Pd., M.Pd.
NIDN. 0413088901

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT karena atas limpahan rahmat-Nya kami dapat menyelesaikan modul kalkulus 2 untuk mahasiswa Fakultas Teknik Universitas Pamulang. Modul ini dilengkapi dengan teori, contoh soal, dan latihan soal sehingga mahasiswa lebih mudah dalam memahami materi.

Adapun topik yang dibahas dalam modul Kalkulus 2 ini adalah tentang integral. Integral yang dibahas yaitu mengenai integral tak tentu dan integral tentu. Adapun teknik-teknik pengintegralan yang digunakan adalah aturan dasar integral, integral substitusi, integral fungsi trigonometri, integral fungsi aljabar, integral fungsi eksponensial, integral fungsi rasional, dan integral parsial. Aplikasi integral digunakan untuk menentukan luas daerah dan volum benda putar, yang meliputi : menentukan luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x dan sumbu y , serta luas daerah yang dibatasi oleh garis dan kurva atau dua kurva. Kemudian aplikasi integral untuk menentukan volume benda putar dengan metode cakram, cincin dan selimut tabung.

Kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu proses penyelesaian modul ini. Kami sangat mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan dan kesempurnaan modul ini. Semoga modul ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Pamulang, Oktober 2019
Tim Penyusun

DAFTAR ISI

KALKULUS 2	ii
DATA PUBLIKASI UNPAM PRESS	iii
IDENTITAS MATA KULIAH	iv
KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI.....	vi
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR TABEL	xii
PERTEMUAN KE 1.....	1
ATURAN DASAR INTEGRAL	1
A. Tujuan Pembelajaran.....	1
B. Uraian Materi.....	1
C. Latihan Soal	7
D. Daftar Pustaka	8
PERTEMUAN KE 2.....	9
ATURAN SUBSTITUSI INTEGRAL TAK TENTU	9
A. Tujuan Pembelajaran.....	9
B. Uraian Materi.....	9
C. Latihan Soal	16
D. Daftar Pustaka	17
PERTEMUAN KE 3.....	18
INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI TRIGONOMETRI	18
A. Tujuan Pembelajaran.....	18
B. Uraian Materi.....	18
C. Latihan Soal	25
D. Daftar Pustaka	25
PERTEMUAN KE 4.....	26
ATURAN SUBSTITUSI INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI TRIGONOMETRI	26
A. Tujuan Pembelajaran.....	26
B. Uraian Materi.....	26
C. Latihan Soal	31
D. Daftar Pustaka	32

PERTEMUAN KE 5.....	33
INTEGRAL TENTU FUNGSI ALJABAR	33
A. Tujuan Pembelajaran.....	33
B. Uraian Materi.....	33
C. Latihan Soal	39
D. Daftar Pustaka	39
PERTEMUAN KE 6.....	40
INTEGRAL TENTU FUNGSI TRIGONOMETRI.....	40
A. Tujuan Pembelajaran.....	40
B. Uraian Materi.....	40
C. Latihan Soal	46
D. Daftar Pustaka	47
PERTEMUAN KE 7.....	48
ATURAN SUBSTITUSI INTEGRAL TENTU FUNGSI ALJABAR	48
A. Tujuan Pembelajaran.....	48
B. Uraian Materi.....	48
C. Latihan Soal	57
D. Daftar Pustaka	58
PERTEMUAN KE 8.....	59
ATURAN SUBSTITUSI INTEGRAL TENTU FUNGSI TRIGONOMETRI.....	59
A. Tujuan Pembelajaran.....	59
B. Uraian Materi.....	59
C. Latihan Soal	69
D. Daftar Pustaka	70
PERTEMUAN KE 9.....	71
ATURAN SUBSTITUSI INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI EKSPONENSIAL	71
A. Tujuan Pembelajaran.....	71
B. Uraian Materi.....	71
C. Latihan Soal	79
D. Daftar Pustaka	79
PERTEMUAN KE 10	80
ATURAN SUBSTITUSI INTEGRAL TENTU FUNGSI EKSPONENSIAL	80
A. Tujuan Pembelajaran.....	80

B. Uraian Materi.....	80
C. Latihan Soal	88
D. Daftar Pustaka	88
PERTEMUAN 11.....	89
INTEGRAL FUNGSI RASIONAL	89
A. Tujuan Pembelajaran.....	89
B. Uraian Materi.....	89
C. Latihan Soal	93
D. Daftar Pustaka	94
PERTEMUAN KE 12	95
INTEGRAL PARSIAL TAK TENTU	95
A. Tujuan Pembelajaran.....	95
B. Uraian Materi.....	95
C. Latihan Soal.....	104
D. Daftar Pustaka	104
PERTEMUAN KE 13	105
INTEGRAL PARSIAL TENTU	105
A. Tujuan Pembelajaran.....	105
B. Uraian Materi.....	105
C. Latihan Soal	115
D. Daftar Pustaka	115
PERTEMUAN KE 14	116
LUAS DAERAH YANG DIBATASI SUMBU X DAN Y	116
A. Tujuan Pembelajaran.....	116
B. Uraian Materi.....	116
C. Latihan Soal	121
D. Daftar Pustaka	123
PERTEMUAN KE 15	124
LUAS DAERAH YANG DIBATASI GARIS-KURVA DAN DUA KURVA	124
A. Tujuan Pembelajaran.....	124
B. Uraian Materi.....	124
C. Latihan Soal	128
D. Daftar Pustaka	129

PERTEMUAN KE 16	130
VOLUME BIDANG PUTAR DENGAN METODE CAKRAM	130
A. Tujuan Pembelajaran.....	130
B. Uraian Materi.....	130
C. Latihan Soal	134
D. Daftar Pustaka	135
PERTEMUAN KE 17	136
VOLUME BIDANG PUTAR DENGAN METODE KULIT TABUNG	136
A. Tujuan Pembelajaran.....	136
B. Uraian Materi.....	136
C. Latihan Soal	140
D. Daftar Pustaka	142
PERTEMUAN KE 18	143
VOLUME BIDANG PUTAR DENGAN METODE CINCIN	143
A. Tujuan Pembelajaran.....	143
B. Uraian Materi.....	143
C. Latihan Soal	148
D. Daftar Pustaka	149
GLOSARIUM.....	150
DAFTAR PUSTAKA.....	152

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Sketsa Perbedaan Integral dan Turunan	1
Gambar 3.2 Sketsa Hypotenuse, Opposite, dan Adjacent Pada Segitiga Siku-siku	19
Gambar 3.3 Kuadran Fungsi Trigonometri.....	21
Gambar 3.4 Sketsa Turunan dan Integral Fungsi Trigonometri	22
Gambar 5.5 Penjumlahan Riemann	34
Gambar 6.6 Sketsa Besar Sudut 1 Rad	40
Gambar 9.7 Sketsa Konsep Fungsi Eksponensial.....	72
Gambar 18 Grafik Fungsi $y = b^x$ dan $y = \log_b x$	81
Gambar 19 Grafik $y = \log_b x$ dengan $b = 2, e, 4$, dan 10	81
Gambar 14.10 Sketsa Luas yang dibatasi oleh sumbu x dan $y = f(x)$	116
Gambar 14.11 Sketsa Daerah yang Dibatasi oleh kurva $f(x)=4-x^2$, Sumbu x , garis $x= 0$, dan $x= 1$	117
Gambar 14.12 Sketsa Luas Daerah yang Dibatasi oleh Sumbu x dan $y = f(x)$	118
Gambar 14.13 Sketsa Daerah yang Dibatasi oleh garis $y= 14-x^2$, sumbu x , garis $x= 4$, dan Sumbu y	119
Gambar 14.14 Sketsa Grafik yang Dibatasi oleh Sumbu y , Kurva $x=g(y)$, Serta Garis $y=c$ dan $y=d$	120
Gambar 14.15 Sketsa daerah yang dibatasi oleh yang dibatas oleh parabola $x=4-y^2$, sumbu y , $y=2$ dan $y=-1$	120
Gambar 15.16 Sketsa Daerah yang Dibatasi Oleh Dua Kurva.....	124
Gambar 15.17 Konsep Integral Luas Daerah yang Dibatasi Oleh Dua Kurva	125
Gambar 15.18 Daerah yang Dibatasi Dibatasi Oleh $y = x$ dan $y = x^2$	126
Gambar 15.19 Daerah yang Dibatasi Dibatasi Oleh $x = -y^2 + 2$ dan $x = y$	127
Gambar 16.20 Sketsa Konsep Metode Cakram.....	130
Gambar 16.21 Sketsa Bidang yang Diputar 360° Mengelilingi Sumbu X	131
Gambar 16.22 Sketsa Bidang yang Diputar 360° Mengelilingi Sumbu Y	132
Gambar 16.23 Bidang Putar yang Dibatasi Oleh $y = \sin x$ dan sumbu x	133
..... Gambar 16.24 Bidang Putar yang Dibatasi Oleh $y = \sqrt{x}$ dan $x = 4$	133
Gambar 17.25 Sketsa Bidang Putar Berbentuk Kulit Tabung.....	136
Gambar 17.26 Sketsa Bidang Putar Berbentuk Kulit Tabung Dengan Panjang $t(y)$ dan Lebar Δy	137
Gambar 17.27 Sketsa Bidang dengan Sumbu Putar Sumbu y	138
Gambar 17.28 Sketsa Bidang Putar Terhadap Sumbu y	139
Gambar 17.29 Sketsa Bidang yang Dibatasi oleh $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, dan $x = 1$	139
Gambar 18.30 Sketsa Konsep Dasar Metode Cincin.....	143
Gambar 18.31 Sketsa Penerapan Metode Cincin	144
Gambar 18.32 Sketsa Bidang yang Diputar 360° Mengelilingi Sumbu X	145
Gambar 18.33 Sketsa Bidang yang Diputar 360° Mengelilingi Sumbu Y	146

Gambar 18.34 Sketsa Daerah yang Dibatasi Oleh $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$ yang Diputar Mengelilingi Sumbu x.....	147
Gambar 18.35 Sketsa Daerah yang Dibatasi oleh $y = x^2 + 1$ dan $y = -x + 3$ yang diputar mengelilingi sumbu x yang diputar mengelilingi sumbu x.....	147

DAFTAR TABEL

Tabel 6.1 Sudut Istimewa Kuadran I	41
Tabel 6.2 Sudut Istimewa Kuadran II	42
Tabel 6.3 Sudut Istimewa Kuadran III.....	42
Tabel 6.4 Sudut Istimewa Kuadran IV	43
Tabel 9.1 Hasil dari $(1+n)^{(1/n)}$ Dengan Pendekatan $x \rightarrow +\infty$	72
Tabel 12.1 Integral Parsial	96

PERTEMUAN KE 1

ATURAN DASAR INTEGRAL

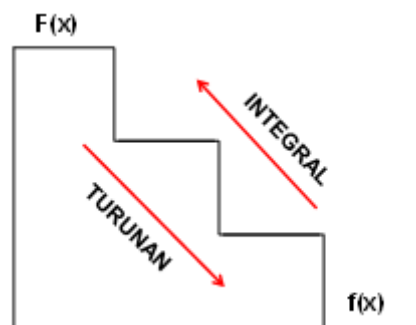
A. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan dasar integral tak tentu.

B. Uraian Materi

1. Definisi Integral

Integral merupakan materi lanjutan dari materi Turunan (*Derivative*) pada Kalkulus I. Sketsa perbedaan dari turunan dan integral dapat dilihat pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Sketsa Perbedaan Integral dan Turunan

Sebagian besar operasi matematika memiliki pasangan yang berbalik nilai, misal penjumlahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian, perpangkatan dan akar pangkat dua. Integral atau yang sering disebut *antiderivative* merupakan “bentuk operasi matematika yang menjadi kebalikan (*invers*) dari operasi turunan fungsi, selain itu integral juga merupakan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu” (Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016). Berdasarkan pengertian tersebut, ada dua hal yang dilakukan dalam integral sehingga dikategorikan menjadi 2 jenis integral. Secara garis besar, integral dibagi menjadi dua jenis, yaitu: (1) Integral sebagai invers/kebalikan dari turunan disebut sebagai integral tak tentu. Integral ini sering disebut integral yang tak terbatas, karena memiliki interval $-\infty$ sampai ∞ ($-\infty, \infty$); (2) Integral sebagai limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu disebut integral tentu. Integral ini juga disebut integral terbatas, karena memiliki interval tertutup antara a sampai b $[a,b]$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$.

Leibniz (ilmuwan asal Leipzig, Jerman) menyimbolkan integral dengan tanda “ $\int$ ”. Ilmuwan dengan nama lengkap Gottfried Wilhelm Leibniz ini merupakan

tokoh yang mengembangkan dan memperkenalkan konsep turunan (differensial) dan antiturunan (antidifferensial/integral). Lambang integral “ $\int$ ” diambil dari huruf pertama Leibniz, yaitu huruf “L”, namun pada zaman dahulu orang menuliskan huruf “L” dalam bentuk “ $\int$ ” yang kemudian dipakai hingga saat ini.

2. Integral Tak Tentu

Misalkan diketahui suatu fungsi $F(x)$ yang merupakan fungsi umum yang bersifat $F'(x) = f(x)$, maka integral tak tentu merupakan himpunan anti turunan $F(x)$ dari $f(x)$ pada interval $(-\infty, \infty)$ yang dinotasikan:

$$F(x) = \int f(x)dx + c$$

(E.Vaberg, Purcell, & Rigdon, 2007)

Keterangan:

$\int$: simbol integral

$f(x)$: fungsi integran

dx : variabel integrasi

$F(x)$: hasil integrasi

c : tetapan integrasi

Bentuk $\int f(x)dx + c$ disebut Integral tak tentu. Kata “tak tentu” menandakan bahwa hasil dari integral merupakan fungsi “generik” atau sering disebut “konstan”. Jika integral suatu fungsi ditulis sebagai $\int f(x)dx$, maka dx menyatakan variabel integrasinya. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi integran merupakan fungsi dalam variabel x . Namun sebenarnya, variabel integrasi tidak harus menggunakan abjad x saja, tetapi bisa memakai variabel lain, seperti $\int f(y)dy$, $\int f(t)dt$, atau $\int f(z)dz$. Pada penulisan tersebut yang perlu diperhatikan adalah variabel integrasi biasanya diadaptasi dengan variabel fungsi integrannya. Jika integran merupakan fungsi dalam variabel x , maka variabel integrasi yang dipakai adalah dx , jika integran merupakan fungsi dalam variabel t , maka variabel integrasi yang dipakai adalah dt . Sehingga dapat disimpulkan bahwa variabel integrasi menunjukkan bahwa fungsi integran akan ditarik integralnya terhadap variabel tersebut. Untuk lebih memahami integral tak tentu tersebut, perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh:

Misal diketahui turunan dari beberapa fungsi sebagai berikut.

- 1) Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3$ adalah $y' = 3x^2$
- 2) Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 + 8$ adalah $y' = 3x^2$
- 3) Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 + 17$ adalah $y' = 3x^2$
- 4) Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 - 6$ adalah $y' = 3x^2$

Seperti yang sudah dipelajari dalam materi turunan, variabel dalam suatu fungsi mengalami penurunan pangkat. Berdasarkan contoh tersebut, diketahui bahwa ada banyak fungsi yang **memiliki hasil turunan yang sama** ($y' = 3x^2$) **dari fungsi aljabar yang berbeda**. Fungsi dari variabel x^3 ataupun fungsi dari variabel x^3 yang ditambah atau dikurang suatu tetapan integrasi (misal pada contoh: +8, +17, dan -6) memiliki turunan yang sama. Jika $y' = 3x^2$ diintegrasikan, seharusnya menjadi fungsi-fungsi awal sebelum diturunkan, artinya jawabannya bisa $y = x^3$, $y = x^3 + 8$, $y = x^3 + 17$, $y = x^3 - 6$ atau bahkan jawaban yang lain. Dari kasus tersebut, dapat dilihat bahwa nilai konstanta dari suatu integral tak tentu tidak dapat ditentukan secara pasti, sehingga hasil integral tak tentu dapat ditulis: $\int f(x)dx + c$.

3. Aturan Dasar Integral Tak Tentu

Untuk menyelesaikan persoalan tentang integral tak tentu, terdapat aturan-aturan dasar yang harus dipahami. Aturan-aturan tersebut yaitu:

a. Aturan fungsi aljabar

- 1) Jika n adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1, maka berdasarkan aturan fungsi aljabar, integral tak tentu dari x^n ditulis:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

- 2) Dari poin 1. Jika $n = 0$, maka berdasarkan aturan fungsi aljabar, integral tak tentu dari x^0 ditulis:

$$\int x^n dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c$$

- 3) Jika $n = -1$, aturan no. 1 dan 2 tidak berlaku untuk karena ketika $n = -1$ maka penyebut fungsi dari integran akan menjadi nol. Dalam ilmu matematika, jika suatu pecahan yang pembilangnya angka selain nol dengan penyebut nol,

maka bilangan tersebut tidak dapat didefinisikan. Namun berdasarkan aturan fungsi aljabar, integral tak tentu dari x^{-1} ditulis:

$$\int x^{-1} dx = \ln x + c$$

(Edwards & H., 2010)

b. Aturan Kelinearan

Misalkan diketahui dua fungsi, yaitu fungsi f dan g , dimana kedua fungsi tersebut mempunyai integral, maka berdasarkan aturan kelinearan berlaku sifat sebagai berikut.

1) $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx, k = \text{koefisien}$

Sifat ini menunjukkan bahwa koefisien pada fungsi integran dapat diubah menjadi koefisien dari integral.

2) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Sifat ini menunjukkan bahwa untuk menghitung fungsi integran yang berbentuk penjumlahan dapat diuraikan menjadi penjumlahan integral dari masing-masing fungsinya.

3) $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

Seperti sifat kedua, sifat ini menunjukkan bahwa untuk menghitung fungsi integran yang berbentuk pengurangan dapat diuraikan menjadi pengurangan integral dari masing-masing fungsinya.

(Slamet H.W., 2003)

Contoh Penggunaan Aturan Fungsi Aljabar:

Tentukan hasil integral-integral berikut.

1. $\int x dx$

2. $\int 3 dx$

3. $\int -12 dx$

4. $\int x^3 dx$

5. $\int \sqrt{x} dx$

6. $\int \frac{1}{x} dx$

7. $\int x^{2/3} dx$

8. $\int x^{-4} dx$
9. $\int x^{3/4} dx$
10. $\int x^{-4/5} dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 1. \int x dx &= \frac{x^{1+1}}{1+1} + c \\
 &= \frac{x^2}{2} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \int 3 dx &= \int 3.1 dx \\
 &= \int 3.x^0 dx \\
 &= 3 \int x^0 dx \\
 &= 3x + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \int -12 dx &= \int -12.1 dx \\
 &= \int -12.x^0 dx \\
 &= -12 \int x^0 dx \\
 &= -12x + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \int x^3 dx &= \frac{x^{3+1}}{3+1} + c \\
 &= \frac{x^4}{4} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \int \sqrt{x} dx &= \int x^{1/2} dx \\
 &= \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + c \\
 &= \frac{x^{3/2}}{3/2} + c \\
 &= \frac{2}{3} x^{3/2} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \int \frac{1}{x} dx &= \int x^{-1} dx \\
 &= \ln x + c
 \end{aligned}$$

$$7. \int x^{2/3} dx = \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} + c$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^{5/3}}{5/3} + c \\ &= \frac{3}{5} x^{5/3} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \int x^{-4} dx &= \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c \\ &= \frac{x^4}{4} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \int x^{3/4} dx &= \frac{x^{3/4+1}}{3/4+1} + c \\ &= \frac{x^{7/4}}{7/4} + c \\ &= \frac{4}{7} x^{7/4} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \int x^{-4/5} dx &= \frac{x^{-4/5+1}}{-4/5+1} + c \\ &= \frac{x^{1/5}}{1/5} + c \\ &= 5x^{1/5} + c \end{aligned}$$

Contoh Penggunaan Aturan Kelinieran:

Tentukan hasil integral-integral berikut.

1. $\int 2x^4 dx$

2. $\int \frac{1}{2} x^3 dx$

3. $\int \sqrt{x^3} dx$

4. $\int (2x^2 + 3x) dx$

5. $\int (3x^2 + 4x - 5) dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 1. \int 2x^4 dx &= 2 \int x^4 dx \\ &= 2 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + c \\ &= 2 \cdot \frac{x^5}{5} + c \\ &= \frac{2}{5} x^5 + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \int \frac{1}{2} x^3 dx &= \frac{1}{2} \int x^3 dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} + c \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + c \\
 &= \frac{1}{8} x^4 + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \int \sqrt{x^3} dx &= \int x^{3/2} dx \\
 &= \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + c \\
 &= \frac{x^{5/2}}{5/2} + c \\
 &= \frac{2}{5} x^{5/2} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \int (2x^2 + 3x) dx &= \int 2x^2 dx + \int 3x dx \\
 &= 2 \int x^2 dx + 3 \int x dx \\
 &= 2 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 3 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + c \\
 &= 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} + c \\
 &= \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \int (3x^2 + 4x - 5) dx &= \int 3x^2 dx + \int 4x dx - \int 5 dx \\
 &= 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx - 5 \int dx \\
 &= 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 4 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} - 5 \cdot \frac{x^{0+1}}{0+1} + c \\
 &= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + c \\
 &= x^3 + 2x^2 - 5x + c
 \end{aligned}$$

C. Latihan Soal

Dengan aturan fungsi aljabar dan aturan kelinieran, selesaikan soal-soal integral berikut.

$$1. \int \sqrt{x^3} dx$$

2. $\int \frac{1}{x^3} dx$
3. $\int x^{5/2} dx$
4. $\int \frac{3}{4} x^{-6} dx$
5. $\int \frac{2}{5} x^{1/4} dx$
6. $\int x\sqrt{x} dx$
7. $\int x(1 - x^2) dx$
8. $\int (2x - 1)^2 dx$
9. $\int (\frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2) dx$
10. $\int \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4} dx$

D. Daftar Pustaka

E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). Calculus (Ninth Edition). Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.

Edwards, R. L., & H., B. (2010). Calculus (Ninth Edition). New York: Richard Stratton.

Hass, J., Weir, M. D., George B. Thomas, J., & Hell, C. (2016). University Calculus Early Transcendental. New York: Pearson Education, Inc.

Slamet H.W. (2003). Kalkulus 2. Surakarta: UMS.

PERTEMUAN KE 2

ATURAN SUBSTITUSI INTEGRAL TAK TENTU

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan integral tak tentu dengan aturan substitusi.

B. Uraian Materi

1. Definisi Aturan Substitusi

Aturan substitusi merupakan aturan di dalam integral yang digunakan ketika proses pengintegralan tidak bisa diselesaikan dengan rumus-rumus dasar integral, atau seandainya bisa diselesaikan namun akan memerlukan proses yang cukup panjang (Ratnadewi; dkk, 2016). Secara umum, integral substitusi didefinisikan sebagai suatu teknik pengintegralan dengan memasukkan variabel baru yang tepat sehingga diperoleh bentuk fungsi baru yang lebih mudah diselesaikan. Umumnya aturan ini digunakan pada soal integral dengan pangkat fungsi integrannya lebih dari 2, negatif, atau pecahan. Dalam pengintegralan dengan metode substitusi, terlebih dulu harus sudah menguasai konsep-konsep turunan yang dipelajari pada Kalkulus 1, dimana $\frac{du}{dx}$ adalah turunan dari u terhadap x . Misalkan $u = 2x + 1$, turunan u terhadap x ditulis: $\frac{du}{dx} = 2$ atau dapat ditulis $du = 2 dx$.

Soal-soal integral dapat diselesaikan jika bentuknya sesuai dengan bentuk rumus dasar. Jika suatu persoalan integral belum mempunyai bentuk rumus dasar, maka harus diubah terlebih dahulu dengan aturan substitusi.

Teorema aturan substitusi integral tak tentu didefinisikan : misalkan g adalah fungsi yang dapat diintegalkan dan r adalah bilangan rasional kecuali -1 , maka :

$$\int [g(x)]^r g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + c$$

(Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016)

Untuk mempermudah mendapatkan bentuk baku $\int [g(x)]^r g'(x) dx$, maka harus dimisalkan $u = g(x)$, dengan $du = g'(x) dx$, sehingga berdasarkan Teorema

aturan substitusi integral tak tentu, didapatkan rumus aturan substitusi untuk fungsi aljabar sebagai berikut.

$$\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + c, r \neq -1$$

Untuk $r = -1$, maka rumus di atas menjadi :

$$\int u^r du = \ln |u| + c$$

(E.Vaberg, Purcell, & Rigdon, 2007)

2. Langkah-langkah Penyelesaian Integral Dengan Aturan Substitusi

Untuk menyelesaikan persoalan integral dengan aturan substitusi perlu diperhatikan langkah-langkah berikut.

- Soal harus berbentuk $\int [g(x)]^r g'(x) dx$ (jika belum, ubah ke dalam bentuk tersebut)
- Misalkan fungsi integran yang berpangkat r menjadi fungsi u ,
- Turunkan fungsi u sehingga diperoleh $du = \dots dx$
- Nyatakan nilai dari dx agar sesuai dengan soal yang diberikan, kemudian substitusikan pemisalan tadi ke integral semula
- Ubah fungsi integran menjadi bentuk baku $\int u^r du$
- Jika $r \neq -1$ gunakan rumus $\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + c$, namun jika $r = -1$, gunakan rumus $\int u^r du = \ln |u| + c$

Contoh:

Selesaikan soal-soal integral berikut dengan aturan substitusi.

- $\int (x - 2)^6 dx$
- $\int (3x + 5)^6 dx$
- $\int (x^2 + 1)^8 \cdot 2x dx$
- $\int (2x^2 - 7)^4 \cdot 2x dx$
- $\int (x^2 + 2x - 3)^5 (x + 1) dx$
- $\int (x - 2)(x^2 - 4x + 6)^7 dx$
- $\int (x + 2)(2x^2 + 8x + 6)^9 dx$

8. $\int x\sqrt{x^2 + 4} dx$
9. $\int 2x\sqrt{(4x^2 - 3)^3} dx$
10. $\int \frac{2}{(x+3)^5} dx$

Penyelesaian:

1. $\int (x - 2)^6 dx$

Untuk mempermudah pemahaman, soal ini harus diubah ke dalam bentuk $\int (x - 2)^6 \cdot 1 dx$, sehingga soal tersebut sudah memiliki bentuk dasar $\int u^r du$, dengan memisalkan $u = x - 2$, $du = 1 dx$, dan $r = 6$. Uraian penyelesaiannya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \int (x - 2)^6 dx &= \int u^6 du \\
 &= \frac{u^{6+1}}{6+1} + c \\
 &= \frac{u^7}{7} + c \\
 &= \frac{(x-2)^7}{7} + c
 \end{aligned}$$

2. $\int (3x + 5)^6 dx$

Karena soal berbentuk $\int (3x + 5)^6 dx = \int (3x + 5)^6 \cdot 1 dx$, maka $3 dx$ pada $du = 3 dx$ harus diubah ke bentuk $1 dx$, sehingga harus dikalikan $\frac{1}{3}$. Uraianya sebagai berikut.

Misal:

$$u = 3x + 5$$

Maka:

$$du = 3 dx$$

Untuk menyesuaikan dengan soal, maka $3 dx$ harus diubah menjadi $1 dx$ dengan cara sebagai berikut.

$$\frac{1}{3} du = 1 dx, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned}
 \int (3x + 5)^6 dx &= \int u^6 \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \frac{1}{3} \int u^6 du \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{6+1}}{6+1} + c \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^7}{7} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{u^7}{21} + c \\
 &= \frac{(3x+5)^7}{21} + c
 \end{aligned}$$

3. $\int (x^2 + 1)^8 \cdot 2x \, dx$

Misal:

$$u = x^2 + 1$$

Maka:

$$du = 2x \, dx, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned}
 \int (x^2 + 1)^8 \cdot 2x \, dx &= \int u^8 \, du \\
 &= \frac{u^{8+1}}{8+1} + c \\
 &= \frac{u^9}{9} + c \\
 &= \frac{(x^2 + 1)^9}{9} + c
 \end{aligned}$$

4. $\int (2x^2 - 7)^4 \cdot 2x \, dx$

Misal:

$$u = 2x^2 - 7$$

Maka:

$$du = 4x \, dx$$

$$\frac{1}{2} du = 2x \, dx, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned}
 \int (2x^2 - 7)^4 \cdot 2x \, dx &= \int u^4 \cdot \frac{1}{2} du \\
 &= \frac{1}{2} \int u^4 \, du \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{4+1}}{4+1} + c \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^5}{5} + c \\
 &= \frac{u^5}{10} + c \\
 &= \frac{(2x^2 - 7)^5}{10} + c
 \end{aligned}$$

5. $\int (x^2 + 2x - 3)^5 (x + 1) \, dx$

Misal:

$$u = x^2 + 2x - 3$$

Maka:

$$du = (2x + 2) dx$$

$$\frac{1}{2} du = (x + 1) dx, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 2x - 3)^5 (x + 1) dx &= \int u^5 \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^5 du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{5+1}}{5+1} + c \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^6}{6} + c \\ &= \frac{u^6}{12} + c \\ &= \frac{(x^2 + 2x - 3)^6}{12} + c \end{aligned}$$

$$6. \int (x - 2)(x^2 - 4x + 6)^7 dx$$

Misal:

$$u = x^2 - 4x + 6$$

Maka:

$$du = (2x - 4) dx$$

$$\frac{1}{2} du = (x - 2) dx, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned} \int (x - 2)(x^2 - 4x + 6)^7 dx &= \int u^7 \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^7 du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{7+1}}{7+1} + c \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^8}{8} + c \\ &= \frac{u^8}{16} + c \\ &= \frac{(x^2 - 4x + 6)^8}{16} + c \end{aligned}$$

$$7. \int (x + 2)(2x^2 + 8x + 6)^9 dx$$

Misal:

$$u = 2x^2 + 8x + 6$$

Maka:

$$du = (4x + 8) dx$$

$$\frac{1}{4} du = (x + 2) dx, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned}
 \int (x+2)(2x^2+8x+6)^9 dx &= \int u^9 \cdot \frac{1}{4} du \\
 &= \frac{1}{4} \int u^9 du \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{9+1}}{9+1} + c \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{10}}{10} + c \\
 &= \frac{u^{10}}{40} + c \\
 &= \frac{(2x^2+8x+6)^{10}}{40} + c
 \end{aligned}$$

8. $\int x\sqrt{x^2+4} dx$

Untuk fungsi integran berbentuk akar seperti ini harus diubah dulu menjadi bentuk pangkat sehingga:

$$\int x\sqrt{x^2+4} dx = \int x(x^2+4)^{1/2} dx$$

Misal:

$$u = (x^2 + 4)$$

Maka:

$$du = 2x dx$$

$$\frac{1}{2} du = x dx, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned}
 \int x\sqrt{x^2+4} dx &= \int u^{1/2} \cdot \frac{1}{2} du \\
 &= \frac{1}{2} \int u^{1/2} du \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + c \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{3/2} + c \\
 &= \frac{u^{3/2}}{3} + c \\
 &= \frac{u^{3/2}}{3} + c \\
 &= \frac{(x^2+4)^{3/2}}{3} + c \\
 &= \frac{\sqrt{(x^2+4)^3}}{3} + c
 \end{aligned}$$

(upayakan jawaban akhir tidak mengandung pangkat pecahan atau negatif)

9. $\int 2x\sqrt{(4x^2 - 3)^3} dx$

Seperti soal no.8, bentuk ini harus diubah dulu ke dalam bentuk pangkat, sehingga:

$$\int 2x\sqrt{(4x^2 - 3)^3} dx = \int 2x \cdot (4x^2 - 3)^{3/2} dx$$

Misal:

$$u = 4x^2 - 3$$

Maka:

$$du = 8x$$

$$\frac{1}{2} du = 4x, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned} \int 2x\sqrt{(4x^2 - 3)^3} dx &= \int u^{3/2} \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^{3/2} du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} + c \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{5/2}}{5/2} + c \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot u^{5/2} + c \\ &= \frac{u^{5/2}}{5} + c \\ &= \frac{u^{5/2}}{5} + c \\ &= \frac{(x^2+4)^{5/2}}{5} + c \\ &= \frac{\sqrt{(4x^2-3)^5}}{5} + c \end{aligned}$$

10. $\int \frac{2}{(x+3)^5} dx$

Untuk fungsi integran berbentuk pecahan seperti ini, juga harus diubah dulu ke dalam bentuk pangkat, sehingga:

$$\int \frac{2}{(x+3)^5} dx = \int 2 \cdot (x+3)^{-5} dx$$

Misal:

$$u = x + 3$$

Maka:

$$du = 1 dx$$

$2 du = 2 dx$, sehingga:

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(x+3)^5} dx &= \int u^{-5} \cdot 2 dx \\&= 2 \int u^{-5} du \\&= 2 \cdot \frac{u^{-5+1}}{-5+1} + c \\&= 2 \cdot \frac{u^{-4}}{-4} + c \\&= -\frac{1}{2} \cdot u^{-4} + c \\&= -\frac{(x+3)^{-4}}{2} + c \\&= -\frac{1}{2(x+3)^4} + c\end{aligned}$$

C. Latihan Soal

Selesaikan soal-soal integral tek tentu berikut dengan menggunakan aturan substitusi.

1. $\int (-4x + 6)^7 dx$
2. $\int (-10x - 6)^5 dx$
3. $\int x(2x^2 + 6)^9 dx$
4. $\int (-x - 1)(x^2 + 2x + 9)^4 dx$
5. $\int (4x + 6)(2x^2 + 3x + 9)^5 dx$
6. $\int x\sqrt{-2x^2 + 1} dx$
7. $\int 6x\sqrt{(x^2 + 3)^5} dx$
8. $\int \frac{2}{(3x-2)^4} dx$
9. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+9)^6} dx$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx$

D. Daftar Pustaka

E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). Calculus (Ninth Edition). Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.

Hass, J., Weir, M. D., George B. Thomas, J., & Hell, C. (2016). University Calculus Early Transcendental. New York: Pearson Education, Inc.

Ratnadewi; dkk. (2016). Matematika Teknk untuk Perguruan Tinggi. Bandung: Rekayasa Sains.

PERTEMUAN KE 3

INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI TRIGONOMETRI

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan integral tak tentu fungsi trigonometri.

B. Uraian Materi

Sama seperti integral pada umumnya, integral fungsi trigonometri secara garis besar dapat dibedakan menjadi dua jenis, yaitu integral tak tentu fungsi trigonometri dan integral tentu fungsi trigonometri. Pada bab ini akan dibahas mengenai integral tak tentu dari fungsi trigonometri.

1. Definisi Fungsi Trigonometri

Sebelum memahami integral tak tentu fungsi trigonometri, terlebih dulu harus diketahui bahwa trigonometri berasal dari kata Yunani, yaitu *trigonon* : tiga sudut, dan *metron* : mengukur. Sehingga secara istilah, trigonometri diartikan sebagai sebuah cabang matematika yang mempelajari hubungan yang meliputi panjang dan tiga sudut segitiga siku-siku. Dari definisi tersebut, maka dapat dijelaskan bahwa fungsi trigonometri merupakan fungsi yang didalamnya terdapat hubungan panjang dan tiga sudut segitiga siku-siku. Fungsi dasar trigonometri dikelompokkan menjadi 6 jenis, yaitu:

a. $\sin x$

b. $\cos x$

c. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

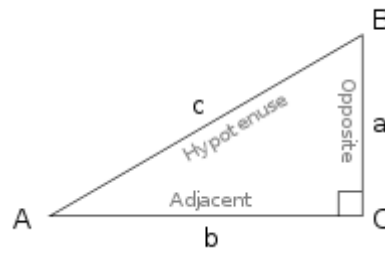
d. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

e. $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$

f. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

(Anton, Bivens, & Davis, 2012)

Penjelasan mengenai fungsi dasar tersebut, khususnya $\sin x$, $\cos x$, dan $\tan x$ dapat dilihat dari konsep secara umum dari suatu segitiga siku-siku yang terdiri dari 3 sisi yang meliputi: *hypotenuse*, *opposite*, dan *adjacent*. Sketsanya seperti pada Gambar 3.1 berikut.



Gambar 3.2 Sketsa Hypotenuse, Opposite, dan Adjacent Pada Segitiga Siku-siku

Untuk mempermudah pemahaman tentang keenam fungsi trigonometri, umumnya istilah *hypotenuse*, *opposite*, dan *adjacent* diganti dengan sisi miring (mi), sisi depan (de), dan sisi samping (sam). Misalkan segitiga pada Gambar 3.1 (segitiga ABC) memiliki sudut CAB sebesar x , maka fungsi $\sin x$ pada segitiga ABC dikatakan sebagai hasil pembagian antara sisi depan dan sisi miring, atau bisa ditulis $\sin x = \frac{\text{de}}{\text{mi}}$. Sedangkan fungsi $\cos x$ pada segitiga ABC merupakan hasil pembagian antara sisi samping dan sisi miring, atau bisa ditulis $\cos x = \frac{\text{sam}}{\text{mi}}$. Fungsi $\tan x$ pada segitiga ABC dikatakan sebagai hasil bagi dari sisi depan dan sisi samping, atau bisa ditulis $\tan x = \frac{\text{de}}{\text{sam}}$.

Sudut-sudut pada fungsi trigonometri dibagi menjadi 4 kuadran, yaitu:

a. Kuadran I

Daerah kuadran I meliputi daerah yang dibatasi sudut $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$. Pada kuadran ini $\sin x$ dan $\cos x$ bernilai positif, sehingga mengakibatkan $\tan x$, $\sec x$, $\csc x$, dan $\cot x$ juga bernilai positif. Kuadran I berlaku sifat-sifat berikut.

- 1) $\sin (90^\circ - x) = \cos x$
- 2) $\cos (90^\circ - x) = \sin x$
- 3) $\tan (90^\circ - x) = \cot x$
- 4) $\sec (90^\circ - x) = \csc x$
- 5) $\csc (90^\circ - x) = \sec x$
- 6) $\cot (90^\circ - x) = \tan x$

(Purcell & Vaberg, 2015)

b. Kuadran II

Daerah kuadran II meliputi daerah yang dibatasi sudut $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$. Pada kuadran ini $\sin x$ bernilai positif, sedangkan $\cos x$ bernilai negatif, sehingga

mengakibatkan cosec x bernilai positif, tetapi $\tan x$, $\sec x$, dan $\cot x$ juga bernilai negatif. Kuadran II berlaku sifat-sifat berikut.

- 1) $\sin (90^\circ + x) = \cos x$
- 2) $\cos (90^\circ + x) = -\sin x$
- 3) $\tan (90^\circ + x) = -\cot x$
- 4) $\sec (90^\circ + x) = -\operatorname{cosec} x$
- 5) $\operatorname{cosec} (90^\circ + x) = \sec x$
- 6) $\cot (90^\circ + x) = -\tan x$
- 7) $\sin (180^\circ - x) = \sin x$
- 8) $\cos (180^\circ - x) = -\cos x$
- 9) $\tan (180^\circ - x) = -\tan x$
- 10) $\sec (180^\circ - x) = -\sec x$
- 11) $\operatorname{cosec} (180^\circ - x) = \operatorname{cosec} x$
- 12) $\cot (180^\circ - x) = -\cot x$

(Purcell & Vaberg, 2015)

c. Kuadran III

Daerah kuadran III meliputi daerah yang dibatasi sudut $180^\circ \leq x \leq 270^\circ$. Pada kuadran ini $\sin x$ dan $\cos x$ bernilai negatif, sehingga mengakibatkan cosec x dan sec x bernilai negatif, sedangkan $\tan x$ dan $\cot x$ bernilai positif. Kuadran III berlaku sifat-sifat berikut.

- 1) $\sin (180^\circ + x) = -\sin x$
- 2) $\cos (180^\circ + x) = -\cos x$
- 3) $\tan (180^\circ + x) = \tan x$
- 4) $\sec (180^\circ + x) = -\sec x$
- 5) $\operatorname{cosec} (180^\circ + x) = -\operatorname{cosec} x$
- 6) $\cot (180^\circ + x) = \cot x$
- 7) $\sin (270^\circ - x) = -\cos x$
- 8) $\cos (270^\circ - x) = -\sin x$
- 9) $\tan (270^\circ - x) = \cot x$
- 10) $\sec (270^\circ - x) = -\operatorname{cosec} x$
- 11) $\operatorname{cosec} (270^\circ - x) = -\sec x$
- 12) $\cot (270^\circ - x) = \tan x$

(Purcell & Vaberg, 2015)

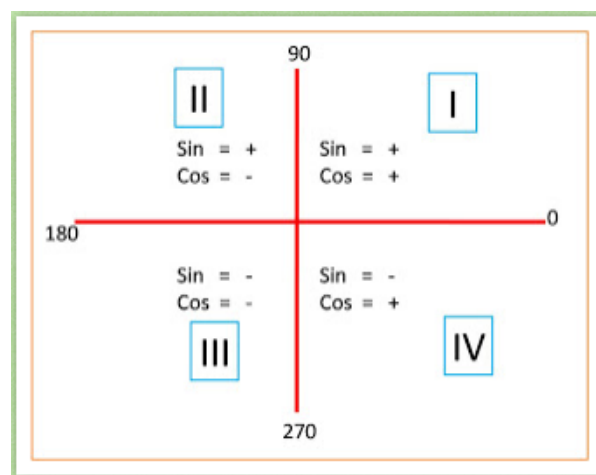
d. Kuadran IV

Daerah kuadran IV meliputi daerah yang dibatasi sudut $270^\circ \leq x \leq 360^\circ$. Pada kuadran ini $\sin x$ bernilai negatif, sedangkan $\cos x$ bernilai positif, sehingga mengakibatkan $\sec x$ bernilai positif, sedangkan $\operatorname{cosec} x$, $\tan x$, dan $\cot x$ bernilai negatif. Kuadran III berlaku sifat-sifat berikut.

- 1) $\sin (270^\circ + x) = -\cos x$
- 2) $\cos (270^\circ + x) = \sin x$
- 3) $\tan (270^\circ + x) = -\cot x$
- 4) $\sec (270^\circ + x) = \operatorname{cosec} x$
- 5) $\operatorname{cosec} (270^\circ + x) = -\sec x$
- 6) $\cot (270^\circ + x) = -\tan x$
- 7) $\sin (360^\circ - x) = -\sin x$
- 8) $\cos (360^\circ - x) = \cos x$
- 9) $\tan (360^\circ - x) = -\tan x$
- 10) $\sec (360^\circ - x) = \sec x$
- 11) $\operatorname{cosec} (360^\circ - x) = -\operatorname{cosec} x$
- 12) $\cot (360^\circ - x) = -\cot x$

(Purcell & Vaberg, 2015)

Secara grafik, keempat kuadran fungsi trigonometri digambarkan seperti Gambar 3.2.



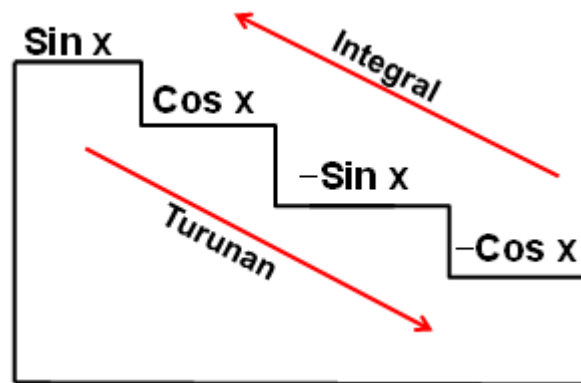
Gambar 3.3 Kuadran Fungsi Trigonometri

2. Definisi Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri

Integral tak tentu fungsi trigonometri merupakan “bentuk integral yang integralnya berbentuk fungsi trigonometri dan memiliki variabel integrasi yang tak terbatas” (Edutafsi.com, 2018). Karena variabel integrasinya tidak memiliki batasan, maka hasil dari integral tak tentu fungsi trigonometri hanyalah berupa penyelesaian umum yang juga dalam bentuk fungsi trigonometri ditambah dengan tetapan integrasi yang disimbolkan dengan huruf c . Karena fungsi integran (fungsi yang diintegrasikan) berbentuk fungsi trigonometri, maka penyelesaiannya pun melibatkan beberapa konsep atau identitas trigonometri. Oleh sebab itu, konsep dasar pada bab ini adalah materi Turunan Fungsi Trigonometri yang sudah dipelajari pada Kalkulus 1.

3. Rumus Dasar Fungsi Trigonometri

Seperti yang sudah dibahas pada bab sebelumnya, bahwa integral adalah operasi balikan dari turunan, maka fungsi trigonometri dapat diselesaikan dengan berpatokan pada hasil dari turunan beberapa fungsi trigonometri. Untuk mempermudah pemahaman tentang rumus dasar fungsi trigonometri, perhatikan Gambar 3.3 berikut.



Gambar 3.4 Sketsa Turunan dan Integral Fungsi Trigonometri

Dari Gambar 3.3 dapat dilihat bahwa aturan dasar integral tak tentu untuk fungsi trigonometri adalah:

1. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
2. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
3. $\int -\sin x \, dx = \cos x + c$
4. $\int -\cos x \, dx = -\sin x + c$

Selain rumus dasar tersebut, berdasarkan turunan fungsi trigonometri, berlaku rumus dasar sebagai berikut.

1. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
2. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$
3. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
4. $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

(Purcell & Vaberg, 2015)

4. Aturan Kelinearan Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri

Sama seperti pada integral tak tentu fungsi aljabar, pada integral tak tentu fungsi trigonometri juga berlaku aturan kelinearan. Misalkan diketahui dua fungsi, yaitu fungsi f dan g , dimana kedua fungsi tersebut mempunyai integral, maka berdasarkan aturan kelinearan berlaku sifat sebagai berikut.

- a. $\int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx, k = \text{koefisien}$
- b. $\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$
- c. $\int [f(x) - g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$

(Slamet H.W., 2003)

Contoh:

Selesaikan soal-soal integral berikut.

1. $\int -\sin x \, dx$
2. $\int -\cos x \, dx$
3. $\int 2\cos x \, dx$
4. $\int -3\sin x \, dx$
5. $\int -5\sec^2 x \, dx$
6. $\int (\sin x + \cos x) \, dx$
7. $\int (-\sin x - \cos x) \, dx$
8. $\int (3\sin x - 2\cos x) \, dx$
9. $\int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) \, dx$
10. $\int -2\sec x \tan x \, dx$

Penyelesaian:

1. $\int -2\sin x \, dx$

Dari rumus dasar $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ dan aturan kelinieran $\int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$, maka:

$$\begin{aligned}\int -\sin x \, dx &= -2 \int \sin x \, dx \\ &= -2(-\cos x) + c \\ &= 2 \cos x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \int -4 \cos x \, dx &= -4 \int \cos x \, dx \\ &= -4(\sin x) + c \\ &= -4 \sin x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \int \frac{1}{2} \cos x \, dx &= \frac{1}{2} \int \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{2}(\sin x) + c \\ &= \frac{1}{2} \sin x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4. \int -\frac{3}{4} \sin x \, dx &= -\frac{3}{4} \int \sin x \, dx \\ &= -\frac{3}{4}(-\cos x) + c \\ &= \frac{3}{4} \cos x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5. \int -5 \sec^2 x \, dx &= -5 \int \sec^2 x \, dx \\ &= -5 \tan x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6. \int (\sin x + \cos x) \, dx &= \int \sin x \, dx + \int \cos x \, dx \\ &= -\cos x + \sin x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7. \int (-\sin x - \cos x) \, dx &= \int -\sin x \, dx - \int \cos x \, dx \\ &= \cos x - \sin x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8. \int (3 \sin x - 2 \cos x) \, dx &= \int 3 \sin x \, dx - \int 2 \cos x \, dx \\ &= 3 \int \sin x \, dx - 2 \int \cos x \, dx \\ &= 3(-\cos x) - 2(\sin x) + c \\ &= -3 \cos x - 2 \sin x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) dx &= \int \sec^2 x dx + \int \operatorname{cosec}^2 x dx \\ &= \tan x - \cot x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \int -2 \sec x \tan x dx &= -2 \int \sec x \tan x dx \\ &= -2(\sec x) + c \\ &= -2 \sec x + c \end{aligned}$$

C. Latihan Soal

Selesaikan soal-soal integral tak tentu fungsi trigonometri berikut.

1. $\int -\sqrt{3} \sin x dx$
2. $\int -\frac{5}{6} \cos x dx$
3. $\int 2 \cos x \cdot \tan x dx$
4. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x} dx$
5. $\int 2 \operatorname{cosec} x \cdot 4 \cot x dx$
6. $\int \left(\frac{\sin^2 x + 1}{\sin x} \right) dx$
7. $\int \frac{2 \sin x}{4 \cos x} dx$
8. $\int (3 \cos^{-1} x \cdot 2 \tan x) dx$
9. $\int 2(-4 \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) dx$
10. $\int \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx$

D. Daftar Pustaka

- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). Calculus 10th Edition. New York: Laurie Rosatone.
- Edutafsi.com. (2018, Januari 24). Rumus Dasar Integral Fungsi Trigonometri Dilengkapi Dengan Contoh. Dipetik Januari 26, 2019, dari Edutafsi.com: <http://www.edutafsi.com/2018/01/rumus-lengkap-integral-fungsi-trigonometri.html>
- Purcell, E. J., & Vaberg, D. (2015). Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid Satu). Jakarta: Erlangga.
- Slamet H.W. (2003). Kalkulus 2. Surakarta: UMS.

PERTEMUAN KE 4

ATURAN SUBSTITUSI INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI TRIGONOMETRI

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan integral tak tentu fungsi trigonometri dengan aturan substitusi.

B. Uraian Materi

Seperti aturan substitusi pada fungsi aljabar, untuk menyelesaikan persoalan integral pada fungsi trigonometri juga dapat diselesaikan jika bentuknya sesuai dengan bentuk rumus dasar. Jika suatu persoalan integral belum mempunyai bentuk rumus dasar, maka harus diubah terlebih dahulu dengan aturan substitusi. Aturan integral substitusi digunakan ketika bagian dari sebuah fungsi merupakan turunan dari fungsi yang lain. Sehingga umumnya persoalan integral yang dapat diselesaikan menggunakan cara substitusi terdiri dari 2 faktor, dimana turunan dari salah satu faktornya memiliki hubungan dengan faktor yang lain. Metode substitusi integral tak tentu fungsi trigonometri merupakan metode penyelesaian integral dengan mengubah bentuk fungsi menjadi lebih sederhana dalam bentuk variabel tertentu yang saling berhubungan dan ditandai dengan adanya pemisalan. Aturan substitusi digunakan karena tidak semua fungsi dapat diintegrasikan dengan rumus dasar atau metode antiturunan yang sesuai. Walaupun tidak semua soal dapat diselesaikan dengan aturan substitusi, tetapi adanya aturan ini sangat membantu menyelesaikan soal-soal trigonometri yang cukup rumit (Ratnadewi; dkk, 2016).

Untuk menyelesaikan integral tak tentu fungsi trigonometri dengan aturan substitusi diperlukan 2 aturan dasar, yaitu:

1. Bentuk baku integral

Misal diketahui bentuk baku integral $\int [g(x)]^r g'(x) dx$, maka harus dimisalkan $u = g(x)$, dengan $du = g'(x) dx$, sehingga berdasarkan Teorema aturan substitusi integral tak tentu, didapatkan rumus aturan substitusi untuk fungsi aljabar sebagai berikut.

$$\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + c, r \neq -1$$

Untuk $r = -1$, maka rumus di atas menjadi :

$$\int u^r du = \ln |u| + c$$

(E.Vaberg, Purcell, & Rigdon, 2007)

2. Rumus-rumus dasar integral fungsi trigonometri

Rumus-rumus dasar integral untuk fungsi trigonometri terdiri banyak jenis, namun yang perlu diketahui antara lain:

- a. $\int \sin u \, dx = -\cos u + c$
- b. $\int \cos u \, dx = \sin u + c$
- c. $\int \sec^2 u \, dx = \tan u + c$
- d. $\int \csc^2 u \, dx = -\cot u + c$
- e. $\int \sec u \tan u \, dx = \sec u + c$

(Thomas, weir, & Hass, 2017)

Contoh:

Selesaikan soal integral berikut dengan aturan substitusi.

1. $\int \cos 2x \, dx$
2. $\int \sin 3x \, dx$
3. $\int \frac{1}{2} \sin 3x \, dx$
4. $\int \cos(2x + 3) \, dx$
5. $\int \sin(3x - 4) \, dx$
6. $\int (2x - 2)\cos(x^2 - 2x + 5) \, dx$
7. $\int \sin^3 x \cos x \, dx$
8. $\int (1 + \cos x)^4 \sin x \, dx$
9. $\int \cos^3 x \sin x \, dx$
10. $\int (1 + \sin x)^4 \cos x \, dx$

Penyelesaian:

1. $\int \cos 2x \, dx$

Misal:

$$u = 2x$$

Maka:

$$du = 2 \, dx$$

$$dx = \frac{1}{2} \, du, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned}\int \cos 2x \, dx &= \int \cos u \cdot \frac{1}{2} \, du \\ &= \frac{1}{2} \int \cos u \, du \\ &= \frac{1}{2} \sin u + c \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x + c\end{aligned}$$

$$2. \int \sin 3x \, dx$$

Misal:

$$u = 3x$$

Maka:

$$du = 3 \, dx$$

$$dx = \frac{1}{3} \, du, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \, dx &= \int \sin u \cdot \frac{1}{3} \, du \\ &= \frac{1}{3} \int \sin u \, du \\ &= \frac{1}{3} (-\cos u) + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos 3x + c\end{aligned}$$

$$3. \int \frac{1}{2} \sin 3x \, dx$$

Misal:

$$u = 3x$$

Maka:

$$du = 3 \, dx$$

$$dx = \frac{1}{3} \, du, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2} \sin 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int \sin 3x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin u \cdot \frac{1}{3} \, du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \int \sin u \, du \\ &= \frac{1}{6} (-\cos u) + c \\ &= -\frac{1}{6} \cos 3x + c\end{aligned}$$

4. $\int \cos(2x + 3) dx$

Misal:

$$u = 2x + 3$$

Maka:

$$du = 2 dx$$

$$dx = \frac{1}{2} du, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned}\int \cos(2x + 3) dx &= \int \cos u \cdot \frac{1}{2} du \\&= \frac{1}{2} \int \cos u du \\&= \frac{1}{2} \cdot (\sin u) + c \\&= \frac{1}{2} \sin u + c \\&= \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + c\end{aligned}$$

5. $\int \sin(3x - 4) dx$

Misal:

$$u = 3x - 4$$

Maka:

$$du = 3 dx$$

$$dx = \frac{1}{3} du, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned}\int \sin(3x - 4) dx &= \int \sin u \cdot \frac{1}{3} du \\&= \frac{1}{3} \int \sin u du \\&= \frac{1}{3} \cdot (-\cos u) + c \\&= -\frac{1}{3} \cos u + c \\&= -\frac{1}{3} \cos(3x - 4) + c\end{aligned}$$

6. $\int (2x - 2) \cos(x^2 - 2x + 5) dx$

Misal:

$$u = x^2 - 2x + 5$$

Maka:

$$du = 2x - 2 dx$$

$dx = \frac{1}{2x-2} du$, sehingga:

$$\begin{aligned}\int (2x-2) \cos(x^2-2x+5) dx &= \int (2x-2) \cos u \cdot \frac{1}{2x-2} du \\ &= \int \cos u du \\ &= \sin u + c \\ &= \sin(x^2-2x+5) + c\end{aligned}$$

7. $\int \sin^3 x \cos x dx$

Misal:

$$u = \sin x$$

Maka:

$$du = \cos x dx$$

$dx = \frac{1}{\cos x} du$, sehingga:

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos x dx &= \int u^3 \cdot \cos x \left(\frac{1}{\cos x} \right) du \\ &= \int u^3 (du) \\ &= \int u^3 du \\ &= \frac{u^4}{4} + c \\ &= \frac{\sin^4 x}{4} + c\end{aligned}$$

8. $\int (1 + \cos x)^4 \sin x dx$

Misal:

$$u = 1 + \cos x$$

Maka:

$$du = -\sin x dx$$

$dx = -\frac{1}{\sin x} du$, sehingga:

$$\begin{aligned}\int (1 + \cos x)^4 \sin x dx &= \int u^4 \sin x \cdot \left(-\frac{1}{\sin x} du \right) \\ &= \int u^4 (-du) \\ &= -\int u^4 du \\ &= -\frac{u^5}{5} + c \\ &= -\frac{(1+\cos x)^5}{5} + c\end{aligned}$$

9. $\int \cos^3 x \sin x \, dx$

Misal:

$$u = \cos x$$

Maka:

$$du = -\sin x \, dx$$

$$dx = -\frac{1}{\sin x} du, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sin x \, dx &= \int u^3 \cdot \sin x \left(-\frac{1}{\sin x}\right) du \\ &= \int u^3 (-du) \\ &= -\int u^3 \, du \\ &= -\frac{u^4}{4} + c \\ &= -\frac{\cos^4 x}{4} + c \end{aligned}$$

10. $\int (1 + \sin x)^4 \cos x \, dx$

Misal:

$$u = 1 + \sin x$$

Maka:

$$du = \cos x \, dx$$

$$dx = \frac{1}{\cos x} du, \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned} \int (1 + \sin x)^4 \cos x \, dx &= \int u^4 \cdot \cos x \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right) du \\ &= \int u^4 (du) \\ &= \int u^4 \, du \\ &= \frac{u^5}{5} + c \\ &= \frac{(1 + \sin x)^5}{5} + c \end{aligned}$$

C. Latihan Soal

Selesaikan soal-soal integral berikut dengan aturan substitusi.

1. $\int -\cos 5x \, dx$

2. $\int \sin(-4x) \, dx$

3. $\int \frac{2}{3} \sin \frac{1}{2} x \, dx$

4. $\int \cos(3 - 4x) \, dx$

5. $\int -\sin(-6x + 1) dx$
6. $\int (-x + 1)\cos(x^2 - 2x + 5) dx$
7. $\int -\sin^5 x \cos x dx$
8. $\int (3 - \cos x)^5 \sin x dx$
9. $\int \cos^3 x (-\sin x) dx$
10. $\int (4 + \sin x)^6 \cos x dx$

D. Daftar Pustaka

E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). Calculus (Ninth Edition). Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.

Ratnadewi; dkk. (2016). Matematika Teknk untuk Perguruan Tinggi. Bandung: Rekayasa Sains.

Thomas, G. B., weir, M. D., & Hass, J. (2017). Kalkulus Thomas (Edisi Ketiga Belas Jilid 1). Jakarta: Erlangga.

PERTEMUAN KE 5

INTEGRAL TENTU FUNGSI ALJABAR

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan integral tentu fungsi aljabar.

B. Uraian Materi

Gambaran umum integral tentu adalah alat utama dalam kalkulus untuk menentukan dan menghitung banyak jumlah penting di berbagai bidang, seperti luas area, volume, dan rata-rata (Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016). Gagasan di balik integral adalah bahwa kita dapat secara efektif menghitung luas daerah suatu kurva dengan memecahnya menjadi potongan-potongan kecil dan kemudian menjumlahkan masing-masing bagian dari potongan-potongan tersebut. Penjumlahan dengan teknik seperti ini dikenal dengan istilah penjumlahan Riemann, dimana penjumlahan tersebut merupakan konsep dasar dari integral tentu.

1. Definisi Penjumlahan Riemann

George Friedrich Bernhard Riemann, atau yang lebih dikenal dengan nama Riemann merupakan ilmuwan berkebangsaan Jerman yang lahir di Breselenz, Kerajaan Hanover, Jerman. Riemann berhasil menemukan sebuah cara untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva dengan menggunakan metode yang disebut penjumlahan Riemann. Penjumlahan Riemann ini dijadikan dasar untuk menentukan konsep dari integral tentu, baik untuk integral tentu fungsi aljabar, trigonometri, maupun ekponensial.

Penjumlahan Riemann merupakan salah satu metode untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva pada interval tertentu dengan menggunakan pendekatan nilai luas beberapa persegi panjang sebagai interval-interval dari luas daerah yang dicari. Konsep ini dirumuskan dengan notasi sebagai berikut.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

(Purcell & Vaberg, 2015)

Keterangan:

$f(x)$: fungsi yang diketahui

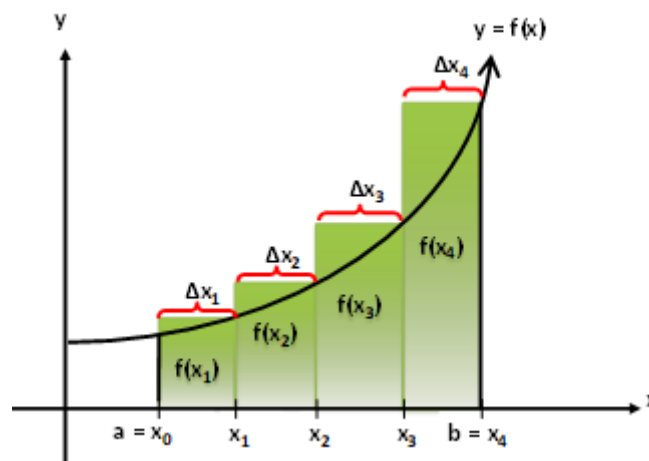
n : banyak sub interval (banyaknya persegi panjang yang terbentuk)

Δx_i : lebar interval ke- i

x_i : titik sub interval ke- i

titik sub interval dibagi menjadi tiga jenis, yaitu titik ujung kiri sub interval, titik ujung kanan sub interval, dan titik tengah sub interval, dimana setiap jenis titik interval tersebut memberikan hasil yang berbeda.

Untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh suatu kurva pada interval tertentu, kita dapat menggunakan aturan "Penjumlahan Riemann". Misal diketahui fungsi f yang terdefinisi dalam interval tertutup $[a,b]$, kemudian interval $[a,b]$ dibagi menjadi n sub-interval ujung kanan yang melewati titik-titik $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, dan $n = 4$, maka untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, garis $x_0 = a$ dan $x_4 = b$ diuraikan melalui sketsa berikut.



Gambar 5.5 Penjumlahan Riemann

Berdasarkan Gambar 5.1, menurut penjumlahan Riemann, maka untuk luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, garis $x_0 = a$, $x_4 = b$, dan sumbu x dapat ditentukan nilai pendekatan jumlah 4 luas persegi panjang yang terbentuk, dengan panjang persegi panjang adalah $f(x_i)$ dan lebar persegi panjang adalah Δx_i . Dari Gambar 5.1 dapat disimpulkan bahwa semakin banyaknya subinterval dan semakin sempitnya lebar subinterval yang diambil (persegi panjang semakin banyak), maka luas keseluruhan daerah akan semakin mendekati luas daerah yang sesungguhnya.

2. Definisi Integral Tentu

Integral tentu atau sering disebut *definite integral* merupakan limit dari penjumlahan Riemann sebagai perumuman dari konsep luas suatu daerah. Misalkan f merupakan fungsi yang terdefinisi dalam interval tertutup $[a,b]$ yang dapat dilakukan penjumlahan Riemann, maka secara geometri fungsi tersebut dapat menyatakan jumlah luas persegi panjang. Jika P merupakan partisi yang lebarnya dinyatakan oleh $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, sedangkan $\bar{x}_i$ titik sampel pada interval ke- i dan $|P|$ merupakan norma P yang menyatakan panjang interval bagian terpanjang dari partisi P , maka limit penjumlahan Riemann untuk $n \rightarrow \infty$ atau $|P| \rightarrow 0$ dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)(\Delta x)_i &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)(\Delta x)_i \\ &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b f(x)(\Delta x) \\ &= \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

(Edwards & H., 2010)

Berdasarkan rumus di atas, maka dapat disimpulkan bahwa andaikan f kontinu pada interval $[a,b]$ dan andaikan F merupakan sembarang anti turunan dari f , maka berlaku integral tentu sebagai berikut.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016)

Keterangan:

$f(x)$: fungsi integran

dx : variabel integrasi

$F(x)$: hasil integrasi

a : batas bawah variabel integrasi

b : batas atas variabel integrasi

$F(a)$: hasil integrasi untuk batas atas

F(b) : hasil integrasi untuk batas bawah

Untuk mengaplikasikan rumus tersebut pada persoalan integral, harus diperhatikan sifat-sifat integral tentu berikut.

- a. $\int_a^a f(x)dx = 0$
- b. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- c. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$, c : koefisien
- d. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)dx$
- e. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x) - \int_a^b g(x)dx$
- f. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $a < b < c$

(Anton, Bivens, & Davis, 2012)

Contoh:

Hitunglah penyelesaian dari integral tentu berikut.

- a. $\int_1^3 5 \, dx$
- b. $\int_1^2 6x \, dx$
- c. $\int_1^2 x^2 \, dx$
- d. $\int_{-1}^3 \frac{1}{2}x^3 \, dx$
- e. $\int_1^2 \frac{3}{x^2} \, dx$
- f. $\int_2^3 (x+1)^2 \, dx$
- g. $\int_0^3 (x-2)^2 \, dx$
- h. $\int_0^4 (-3x^2 + 4) \, dx$
- i. $\int_1^3 (3x^2 + 1) \, dx$
- j. $\int_{-1}^2 (4x^3 - x^2 + 3) \, dx$

Penyelesaian :

1. $\int_1^3 5 \, dx = [5x]_1^3$
 $= 5.3 - 5.1$
 $= 10$
2. $\int_1^2 6x \, dx = 6 \int_1^2 x \, dx$

$$\begin{aligned} &= 6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 \\ &= 3[x^2]_1^2 \\ &= 3.2^2 - 3.1^2 \\ &= 3.4 - 3.1 \\ &= 12 - 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int_1^2 x^2 dx &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \int_{-1}^3 \frac{1}{2} x^3 dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 x^3 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^3 \\ &= \frac{1}{8} [x^4]_{-1}^3 \\ &= \frac{1}{8} . 3^4 - \frac{1}{8} . (-1)^4 \\ &= \frac{81}{8} - \frac{1}{8} \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \int_1^2 \frac{3}{x^2} dx &= \int_1^2 3x^{-2} dx \\ &= \left[3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2 \\ &= \left[-\frac{3}{x} \right]_1^2 \\ &= -\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{1} \right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \int_2^3 (x+1)^2 dx &= \int_2^3 (x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_2^3 \\ &= \left(\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} + 2^2 + 2 \right) \\ &= \left(\frac{27}{3} + 9 + 3 \right) - \left(\frac{8}{3} + 4 + 2 \right) \\ &= \frac{19}{3} + 6 \\ &= 12\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \int_0^3 (x-2)^2 dx &= \int_0^3 (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^3 \\ &= \left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \right) - \left(\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \right) \\ &= 9 - 18 + 12 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \int_0^4 (-3x^2 + 4) dx &= \left[-\frac{3x^3}{3} + 4x \right]_0^4 \\ &= [-x^3 + 4x]_0^4 \\ &= (-4^3 + 4 \cdot 4) - (-0^3 + 4 \cdot 0) \\ &= -64 + 16 \\ &= -48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \int_1^3 (3x^2 + 1) dx &= [x^3 + x]_1^3 \\ &= (3^3 + 3) - (1^3 + 1) \\ &= 30 - 2 \\ &= 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \int_{-1}^2 (4x^3 - x^2 + 3) dx &= \left[\frac{4x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-1}^2 \\ &= \left[x^4 - \frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(2^4 - \frac{2^3}{3} + 3 \cdot 2 \right) - \left((-1)^4 - \frac{(-1)^3}{3} + 3 \cdot (-1) \right) \\
&= \left(16 - \frac{8}{3} + 6 \right) - \left(1 - \frac{(-1)}{3} - 3 \right) \\
&= 14 - \frac{7}{3} \\
&= 11 \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

C. Latihan Soal

Hitunglah penyelesaian dari integral tentu berikut.

1. $\int_{-3}^{-2} 8 \, dx$
2. $\int_1^4 \frac{1}{2} x \, dx$
3. $\int_{-1}^3 -x^2 \, dx$
4. $\int_{-4}^0 \frac{2}{3} x^3 \, dx$
5. $\int_{-2}^0 -\frac{4}{x^3} \, dx$
6. $\int_2^4 (2x + 1)^2 \, dx$
7. $\int_0^2 (x - 4)^2 \, dx$
8. $\int_0^3 (4x^2 + 5) \, dx$
9. $\int_{-1}^3 (-5x^2 - 3) \, dx$
10. $\int_{-1}^4 (5x^3 - 2x^2 + 7) \, dx$

D. Daftar Pustaka

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). Calculus 10th Edition. New York: Laurie Rosatone.

Edwards, R. L., & H., B. (2010). Calculus (Ninth Edition). New York: Richard Stratton.

Hass, J., Weir, M. D., George B. Thomas, J., & Hell, C. (2016). University Calculus Early Transcendental. New York: Pearson Education, Inc.

Purcell, E. J., & Vaberg, D. (2015). Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid Satu). Jakarta: Erlangga.

PERTEMUAN KE 6

INTEGRAL TENTU FUNGSI TRIGONOMETRI

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan integral tentu fungsi trigonometri.

B. Uraian Materi

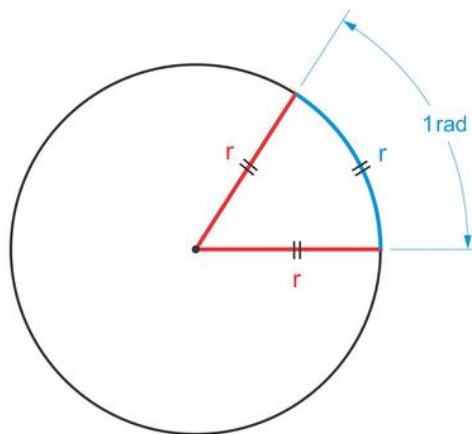
1. Batas Integral Tentu Fungsi Trigonometri

Integral tentu fungsi trigonometri adalah integral dengan fungsi integran berupa fungsi trigonometri dan memiliki batas interval tertutup pada variabel integrasinya. Karena fungsi integran berbentuk trigonometri, maka batas variabel integrasinya berupa besar sudut dan umumnya dinyatakan dengan π radian, dengan $\pi = 180^\circ$ (Ratnadewi; dkk, 2016). Radian merupakan satuan sudut suatu bidang yang dilambangkan dengan “rad”. Hubungan antara sudut dan radian dapat ditulis sebagai berikut.

$$1 \text{ rad} = 57,2957...^\circ$$

$$1^\circ = 0,0174... \text{ rad}$$

Satu radian didefinisikan sebagai besar sudut pusat yang panjang busurnya sama dengan jari-jari, seperti sketsa pada Gambar 6.1 berikut.



Gambar 6.6 Sketsa Besar Sudut 1 Rad

Untuk menemukan hubungan antara derajat dan radian, dapat digunakan konsep perbandingan sudut pusat dan panjang busur sebagai berikut.

$$\frac{\text{sudut pusat}}{360^0} = \frac{\text{panjang busur}}{\text{keliling}}$$

Misalkan:

Sudut pusat : 1 rad

Panjang busur : r

Keliling : $2\pi r$

Maka dengan menggunakan konsep perbandingan sudut pusat dan panjang busur diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{1 \text{ rad}}{360^0} &= \frac{r}{2\pi r} \\ 2\pi r \cdot 1 \text{ rad} &= r \cdot 360^0 \\ \pi \text{ rad} &= 180^0\end{aligned}$$

Jika dihubungkan dengan fungsi trigonometri, maka pembagian sudut istimewa dengan besaran derajat dan radian menurut masing-masing kuadran diuraikan sebagai berikut.

a. Kuadran I

Tabel 6.1 Sudut Istimewa Kuadran I

x (derajat)	0	30	45	60	90
x (radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos x	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	~
cosec x	~	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1
sec x	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	~
cot x	~	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

b. Kuadran II

Tabel 6.2 Sudut Istimewa Kuadran II

x (derajat)	120	135	150	180
x (radian)	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin x	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
tan x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
cosec x	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	~
sec x	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1
cot x	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	~

c. Kuadran III

Tabel 6.3 Sudut Istimewa Kuadran III

x (derajat)	210	225	240	270
x (radian)	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
sin x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
cos x	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
tan x	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	~
cosec x	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1
sec x	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	~
cot x	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1

d. Kuadran IV

Tabel 6.4 Sudut Istimewa Kuadran IV

x (derajat)	300	315	330	360
x (radian)	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin x	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
tan x	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
cosec x	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	~
sec x	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1
cot x	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	~

2. Aturan Dasar Integral Tentu Fungsi Trigonometri

Secara umum, jika $f(x)$ merupakan sebuah fungsi dalam bentuk trigonometri, maka integral tentu dari fungsi $f(x)$ dengan batas atas b dan batas bawah a dapat diselesaikan dengan rumus dasar integral tentu sebagai berikut.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016)

Keterangan:

$f(x)$: fungsi integran (berbentuk trigonometri)

dx : variabel integrasi (berupa sudut dalam π radian)

$F(x)$: hasil integrasi

a : batas bawah variabel integrasi (π radian)

b : batas atas variabel integrasi (π radian)

$F(a)$: hasil integrasi untuk batas atas

$F(b)$: hasil integrasi untuk batas bawah

Karena merupakan integral dari fungsi trigonometri, maka acuannya adalah rumus dasar integral trigonometri berikut.

- a. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- b. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- c. $\int -\sin x \, dx = \cos x + c$
- d. $\int -\cos x \, dx = -\sin x + c$
- e. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
- f. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$
- g. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
- h. $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

(Purcell & Vaberg, 2015)

Untuk mengaplikasikan rumus tersebut pada persoalan integral, harus diperhatikan sifat-sifat integral tentu berikut.

- a. $\int_a^a f(x) \, dx = 0$
- b. $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$
- c. $\int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx$, c : konstanta
- d. $\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$
- e. $\int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx$
- f. $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$, $a < b < c$

(Anton, Bivens, & Davis, 2012)

Contoh:

Hitunglah penyelesaian dari integral tentu berikut.

- 1. $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$
- 2. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$
- 3. $\int_0^{\pi/3} 2 \cos x \, dx$
- 4. $\int_0^{\pi/4} 3 \sin x \, dx$
- 5. $\int_0^{\pi/3} (\sin x + \cos x) \, dx$
- 6. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx$
- 7. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{cosec}^2 x \, dx$
- 8. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec x \tan x \, dx$

9. $\int_{\pi/4}^{2\pi/3} \operatorname{cosec} x \cot x \, dx$
10. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x) dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 1. \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx &= [\sin x]_0^{\pi/2} \\
 &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \\
 &= 1 - 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \int_0^{\pi} \sin x \, dx &= [-\cos x]_0^{\pi} \\
 &= -\cos \pi - (-\cos 0) \\
 &= -(-1) - (-1) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \int_0^{\pi/3} 2 \cos x \, dx &= 2 \int_0^{\pi/3} \cos x \, dx \\
 &= 2[\sin x]_0^{\pi/3} \\
 &= 2(\sin \frac{\pi}{3} - \sin 0) \\
 &= 2(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 0) \\
 &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \int_0^{\pi/4} 3 \sin x \, dx &= 3 \int_0^{\pi/4} \sin x \, dx \\
 &= 3[-\cos x]_0^{\pi/4} \\
 &= 3(-\cos \frac{\pi}{4} - (-\cos 0)) \\
 &= 3(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - (-1)) \\
 &= 3(0,293) \\
 &= 0,879
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \int_0^{\pi/3} (\sin x + \cos x) \, dx &= [-\cos x + \sin x]_0^{\pi/3} \\
 &= (-\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}) - (-\cos 0 + \sin 0) \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - (-1 + 0)
 \end{aligned}$$

$$= 1,366$$

$$\begin{aligned} 6. \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx &= [\tan x]_0^{\pi/4} \\ &= \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{cosec}^2 x \, dx &= [\cot x]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \cot \frac{\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{6} \\ &= 1 - \sqrt{3} \\ &= -0,73 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec x \tan x \, dx &= [\sec x]_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= \sec \frac{\pi}{3} - \sec \frac{\pi}{6} \\ &= 2 - \sqrt{2} \\ &= 0,85 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \int_{\pi/4}^{2\pi/3} \operatorname{cosec} x \cot x \, dx &= [-\operatorname{cosec} x]_{\pi/4}^{2\pi/3} \\ &= -\operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3} - (-\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4}) \\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2} \\ &= 0,26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x) \, dx &= [-\cot x - \tan x]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= (-\cot \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{4}) - (-\cot(-\frac{\pi}{4}) - \tan(-\frac{\pi}{4})) \\ &= (-1 - 1) - (1 - (-1)) \\ &= -2 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

C. Latihan Soal

Hitunglah penyelesaian dari integral tentu berikut.

1. $\int_0^{\pi/4} -2\cos x \, dx$
2. $\int_{\pi/6}^{\pi} -4\sin x \, dx$
3. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} 2\sin x \, dx$
4. $\int_0^{\pi/4} 3\cos x \, dx$
5. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (3\sin x + 2\cos x) \, dx$
6. $\int_{2\pi/3}^{4\pi/5} -4\sec^2 x \, dx$
7. $\int_{5\pi/6}^{\pi} -\operatorname{cosec}^2 x \, dx$
8. $\int_{\pi/3}^{3\pi/4} 2\sec x \cdot 4\tan x \, dx$
9. $\int_{\pi/6}^{2\pi/3} -3\operatorname{cosec} x (-2\cot x) \, dx$
10. $\int_{\pi/4}^{4\pi/5} (\sec x \tan x + \operatorname{cosec} x \cot x) dx$

D. Daftar Pustaka

- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus 10th Edition*. New York: Laurie Rosatone.
- Hass, J., Weir, M. D., George B. Thomas, J., & Hell, C. (2016). *University Calculus Early Transcendental*. New York: Pearson Education, Inc.
- Purcell, E. J., & Vaberg, D. (2015). *Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid Satu)*. Jakarta: Erlangga.
- Ratnadewi; dkk. (2016). *Matematika Teknk untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains.

PERTEMUAN KE 7

ATURAN SUBSTITUSI INTEGRAL TENTU FUNGSI ALJABAR

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini mahasiswa mampu menyelesaikan aturan dasar integral tak tentu metode substitusi ke dalam fungsi aljabar.

B. Uraian Materi

1. Definisi Integral Substitusi

Pada materi integral tak tentu fungsi aljabar telah dijelaskan bahwa misalkan suatu fungsi kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ atau $a \leq x \leq b$. Jika F suatu fungsi sedemikian rupa sehingga $F'(x) = f(x)$ untuk semua x pada $[a,b]$, maka berlaku

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016)

Di sisi lain, pada materi aturan substitusi integral fungsi aljabar, soal-soal integral dapat diselesaikan jika bentuknya sesuai dengan bentuk rumus dasar. Jika suatu persoalan integral belum mempunyai bentuk rumus dasar, maka harus diubah terlebih dahulu dengan aturan substitusi.

Teorema aturan substitusi integral tak tentu didefinisikan : misalkan g adalah fungsi yang dapat diintegrasikan dan r adalah bilangan rasional kecuali -1 , maka :

$$\int [g(x)]^r g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + c$$

(Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016)

Untuk mempermudah mendapatkan bentuk baku $\int [g(x)]^r g'(x)dx$, maka harus dimisalkan $u = g(x)$, dengan $du = g'(x)dx$, sehingga berdasarkan Teorema aturan substitusi integral tak tentu, didapatkan rumus aturan substitusi untuk fungsi aljabar sebagai berikut.

$$\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + c, r \neq -1$$

Untuk $r = -1$, maka rumus di atas menjadi :

$$\int u^r du = \ln |u| + c$$

(E.Vaberg, Purcell, & Rigdon, 2007)

Dari kedua materi tersebut, maka untuk menentukan aturan substitusi integral tentu seperti uraian berikut.

Misalkan fungsi g mempunyai turunan yang kontinu pada $[a,b]$, dan misalkan fungsi f kontinu pada daerah hasil (range) dari g , maka :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \dots \text{dengan } u = g(x)$$

Berdasarkan rumus di atas dan rumus dasar integral tentu, maka misalkan F merupakan turunan dari f berlaku :

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Dari uraian tersebut, maka untuk menentukan aturan substitusi integral tentu berlaku:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

(Purcell & Vaberg, 2015)

Dari uraian tersebut, dapat dilihat bahwa aturan substitusi integral tentu berbeda dengan aturan substitusi integral tak tentu. Jika pada aturan substitusi interval yang diberikan tidak mengalami perubahan, maka untuk aturan substitusi integral tentu mengalami perubahan, yang semula $a \leq x \leq b$ menjadi $g(a) \leq u \leq g(b)$.

2. Langkah-langkah Menyelesaikan Integral Substitusi

Untuk memudahkan penyelesaian persoalan integral tentu dengan aturan substitusi, perlu diperhatikan langkah-langkah berikut.

- Pastikan fungsi integran berbentuk dasar $\int [g(x)]^r g'(x)dx$. Jika belum, ubahlah menjadi bentuk tersebut
- Misalkan bagian dari fungsi integran yang berpangkat lebih dari 2, negatif, atau pecahan menjadi fungsi u
- Turunkan fungsi u sehingga diperoleh $du = \dots dx$

- d. Nyatakan nilai dari dx agar sesuai dengan soal yang diberikan, kemudian substitusikan pemisalan tadi ke integral semula
- e. Tentukan interval baru dengan mensubstitusikan interval $[a,b]$ ke dalam fungsi u
- f. Ubah $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ menjadi $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$
- g. Integralkan $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$

Contoh:

Tentukan penyelesaian integral di bawah ini dengan menggunakan aturan substitusi integral tentu.

1. $\int_0^1 3(3x - 1)^3 dx$
2. $\int_0^2 (2x + 5)^3 dx$
3. $\int_0^1 (x^2 + 1)^3 2x dx$
4. $\int_{-1}^2 2x(2x^2 - 1)^3 dx$
5. $\int_{-1}^1 (x^2 + 2x - 1)^4 (2x + 2) dx$
6. $\int_0^2 (x^2 - x + 1)^4 (6x - 3) dx$
7. $\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 3} dx$
8. $\int_0^3 2x \sqrt[3]{x^2 - 8} dx$
9. $\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3} dx$
10. $\int_{-2}^2 \frac{2}{(x+5)^4} dx$

Penyelesaian :

1. $\int_0^1 3(3x - 1)^3 dx$

Untuk mempermudah metode substitusi, ubah soal tersebut menjadi:

$$\int_0^1 (3x - 1)^3 3 dx$$

Misal:

$$u = 3x - 1$$

Maka:

$$du = 3 dx$$

Karena pada soal variabel integrasinya sudah berbentuk $3 dx$, maka langkah selanjutnya seperti uraian berikut.

Untuk $x = 0$, maka $u = 3 \cdot 0 - 1 = -1$

Untuk $x = 1$, maka $u = 3 \cdot 1 - 1 = 2$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (3x - 1)^3 3 \, dx &= \int_{-1}^2 u^3 \, du \\ &= \left[\frac{u^{3+1}}{3+1} \right]_{-1}^2 \\ &= \left[\frac{u^4}{4} \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} \\ &= \frac{16}{4} - \frac{1}{4} \\ &= 4 - \frac{1}{4} \\ &= 3 \frac{3}{4}\end{aligned}$$

2. $\int_0^2 (2x + 5)^3 \, dx$

Misal $u = 2x + 5$

Maka:

$$du = 2 \, dx$$

Karena pada soal variabel integrasinya belum berbentuk $1 \, dx$, maka du harus diubah menjadi $\frac{1}{2} du$ seperti uraian berikut.

$$\frac{1}{2} du = dx$$

Untuk $x = 0$, maka $u = 1$

Untuk $x = 1$, maka $u = 2$

Sehingga :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x + 5)^3 \, dx &= \int_1^2 u^3 \cdot \frac{1}{2} \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 u^3 \, du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^{3+1}}{3+1} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^4}{4} \right]_1^2 \\ &= \left[\frac{u^4}{8} \right]_1^2 \\ &= \frac{2^4}{8} - \frac{1^4}{8}\end{aligned}$$

$$= \frac{16}{8} - \frac{1}{8}$$

$$= 2 - \frac{1}{8}$$

$$= 1\frac{7}{8}$$

3. $\int_0^1 (x^2 + 1)^3 2x \, dx$

Misal : $u = x^2 + 1$, maka $du = 2x \, dx$

Untuk $x = 0$, maka $u = 1$

Untuk $x = 1$, maka $u = 2$

Sehingga :

$$\int_0^1 (x^2 + 1)^3 2x \, dx = \int_1^2 u^3 \, du$$

$$= \left[\frac{u^{3+1}}{3+1} \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{u^4}{4} \right]_1^2$$

$$= \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}$$

$$= \frac{16}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= 4 - \frac{1}{4}$$

$$= 3\frac{3}{4}$$

4. $\int_{-1}^2 2x(2x^2 - 1)^3 \, dx$

Ubah menjadi $\int_{-1}^2 (2x^2 - 1)^3 2x \, dx$

Misal:

$$u = 2x^2 - 1$$

Maka:

$$du = 2x \, dx$$

untuk $x = -1$, maka $u = 2 \cdot (-1)^2 - 1 = 1$

untuk $x = 2$, maka $u = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$

sehingga:

$$\int_{-1}^2 (2x^2 - 1)^3 2x \, dx = \int_1^7 u^3 \, du$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{u^{3+1}}{3+1} \right]_1^7 \\
&= \left[\frac{u^4}{4} \right]_1^7 \\
&= \frac{7^4}{4} - \frac{1^4}{4} \\
&= \frac{2401}{4} - \frac{1}{4} \\
&= 600
\end{aligned}$$

5. $\int_{-1}^1 (x^2 + 2x - 1)^4 (2x + 2) dx$

Misal:

$$u = x^2 + 2x - 1$$

Maka:

$$du = (2x + 2) dx$$

$$\text{untuk } x = -1, \text{ maka } u = (-1)^2 + 2(-1) - 1 = -2$$

$$\text{untuk } x = 1, \text{ maka } u = (1)^2 + 2(1) - 1 = 2$$

sehingga:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (x^2 + 2x - 1)^4 (2x + 2) dx &= \int_{-2}^2 u^4 du \\
&= \left[\frac{u^{4+1}}{4+1} \right]_{-2}^2 \\
&= \left[\frac{u^5}{5} \right]_{-2}^2 \\
&= \frac{2^5}{5} - \frac{(-2)^5}{5} \\
&= \frac{32}{5} - \frac{(-32)}{5} \\
&= 16
\end{aligned}$$

6. $\int_0^2 (x^2 - x + 1)^4 (6x - 3) dx$

Misal:

$$u = x^2 - x + 1$$

Maka:

$$du = (2x - 1) dx$$

Karena pada soal variabel integrasinya belum berbentuk $(6x - 3) dx$, maka du harus diubah menjadi $3 du$ seperti uraian berikut.

$$3 du = (6x - 3) dx$$

Untuk $x = 0$, maka $u = 0^2 - 0 + 1 = 1$

Untuk $x = 2$, maka $u = 2^2 - 2 + 1 = 3$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 (x^2 - x + 1)^4 (6x - 3) dx &= \int_1^3 u^4 \cdot 3 du \\
 &= 3 \int_1^3 u^4 du \\
 &= \left[\frac{u^{4+1}}{4+1} \right]_{-2}^2 \\
 &= \left[\frac{u^5}{5} \right]_{-2}^2 \\
 &= \frac{2^5}{5} - \frac{(-2)^5}{5} \\
 &= \frac{32}{5} - \frac{(-32)}{5} \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

7. $\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 3} dx$

Misal:

$$u = x^2 + 3$$

Maka:

$$du = 2x dx$$

$$\frac{1}{2} du = x dx$$

Untuk $x = 0$, maka $u = 3$

Untuk $x = 1$, maka $u = 4$

Sehingga :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 3} dx &= \int_3^4 u^{1/2} \cdot \frac{1}{2} du \\
 &= \frac{1}{2} \int_3^4 u^{1/2} du \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_3^4 \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_3^4 \\
 &= \left[\frac{u^{3/2}}{3} \right]_3^4 \\
 &= \left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} \text{ dapat diubah menjadi } u^{\frac{1}{2}} \text{ atau } u \sqrt{u} \right) \\
 &= \left[\frac{u \sqrt{u}}{3} \right]_3^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{4\sqrt{4}}{3} \right) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{3} \right) \\
 &= \left(\frac{8}{3} \right) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{3} \right) \\
 &= \frac{8-3\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

8. $\int_0^3 2x \sqrt[3]{x^2-8} \, dx$

Ubah menjadi $\int_0^3 \sqrt[3]{x^2-8} \cdot 2x \, dx$

Misal:

$$u = x^2 - 8$$

Maka:

$$du = 2x \, dx$$

Untuk $x = 0$, maka $u = 0^2 - 8 = -8$

Untuk $x = 3$, maka $u = 3^2 - 8 = 1$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 \sqrt[3]{x^2-8} \cdot 2x \, dx &= \int_1^8 \sqrt[3]{u} \, du \\
 &= \int_1^8 u^{1/3} \, du \\
 &= \left[\frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \right]_1^8 \\
 &= \left[\frac{u^{4/3}}{4/3} \right]_1^8 \\
 &= \frac{3}{4} \left[u^{4/3} \right]_1^8 \\
 &\quad (u^{\frac{4}{3}} \text{ dapat diubah menjadi } u^{1\frac{1}{3}} \text{ atau } u \sqrt[3]{u}) \\
 &= \frac{3}{4} \left[u \sqrt[3]{u} \right]_1^8 \\
 &= \frac{3}{4} (8 \sqrt[3]{8} - 1 \sqrt[3]{1}) \\
 &= \frac{3}{4} (8 \cdot 2 - 1 \cdot 1) \\
 &= \frac{45}{4}
 \end{aligned}$$

9. $\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3} \, dx$

Ubah menjadi $\int_0^4 (2x+1)^{-3} \, dx$

Misal:

$$u = 2x + 1$$

Maka:

$$du = 2x \, dx$$

$$\frac{1}{2} du = x \, dx$$

Untuk $x = 0$, maka $u = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

Untuk $x = 4$, maka $u = 2 \cdot 4 + 1 = 9$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int_0^4 (2x + 1)^{-3} \, dx &= \int_1^9 u^{-3} \cdot \frac{1}{2} \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^9 u^{-3} \, du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^{-3+1}}{-3+1} \right]_1^9 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^{-2}}{2} \right]_1^9 \\ &= \frac{1}{2} [u^{-2}]_1^9 \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{u^2} \right]_1^9 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9^2} - \frac{1}{1^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{81} - 1 \right) \\ &= -\frac{20}{81} \end{aligned}$$

10. $\int_{-2}^2 \frac{2}{(x+5)^4} \, dx$

Ubah menjadi $\int_{-2}^2 (x + 5)^{-4} \cdot 2 \, dx$

Misal:

$$u = x + 5$$

Maka:

$$du = dx$$

$$2 \, du = 2 \, dx$$

Untuk $x = -2$, maka $u = -2 + 5 = 3$

Untuk $x = 2$, maka $u = 2 + 5 = 7$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^2 (x+5)^{-4} \cdot 2dx &= \int_3^7 u^{-4} \cdot 2du \\
 &= 2 \int_3^7 u^{-4} du \\
 &= 2 \left[\frac{u^{-4+1}}{-4+1} \right]_3^7 \\
 &= 2 \left[\frac{u^{-3}}{-3} \right]_3^7 \\
 &= -\frac{2}{3} [u^{-3}]_3^7 \\
 &= -\frac{2}{3} \left[\frac{1}{u^3} \right]_3^7 \\
 &= -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{7^3} - \frac{1}{3^3} \right) \\
 &= -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{9} \right) \\
 &= \frac{80}{1323}
 \end{aligned}$$

C. Latihan Soal

Tentukan penyelesaian integral di bawah ini dengan menggunakan aturan substitusi integral tentu.

1. $\int_{-1}^1 x(x^2 + 1)^3 dx$
2. $\int_0^2 (4x^2 - 5)^3 2x dx$
3. $\int_{-1}^1 (3x - 2)^3 dx$
4. $\int_{-1}^2 (x + 2)^3 dx$
5. $\int_1^2 2x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$
6. $\int_{-2}^4 x^2 (x^3 + 8)^2 dx$
7. $\int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx$
8. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$
9. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} dx$
10. $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x} (1+\sqrt{x})^2} dx$

D. Daftar Pustaka

E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). Calculus (Ninth Edition). Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.

Hass, J., Weir, M. D., George B. Thomas, J., & Hell, C. (2016). University Calculus Early Transcendental. New York: Pearson Education, Inc.

Purcell, E. J., & Vaberg, D. (2015). Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid Satu). Jakarta: Erlangga.

PERTEMUAN KE 8

ATURAN SUBSTITUSI INTEGRAL TENTU FUNGSI TRIGONOMETRI

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini mahasiswa mampu menyelesaikan aturan dasar integral tak tentu metode substitusi ke dalam fungsi Trigonometri.

B. Uraian Materi

1. Definisi Integral Tentu Fungsi Trigonometri

Integral tentu fungsi trigonometri merupakan integral tentu dengan interval tertutup $[a,b]$ pada fungsi trigonometri. Penggunaan aturan substitusi integral tentu pada fungsi trigonometri memiliki perbedaan dengan penerapannya pada fungsi aljabar. Perbedaannya terletak pada: 1) Integral tentu fungsi trigonometri umumnya menggunakan interval π radian, sehingga untuk menentukan penyelesaiannya harus mengubah interval tersebut menjadi interval baru dengan bentuk bilangan real; 2) Pangkat dari fungsi integran pada aturan substitusi integral tentu fungsi trigonometri umumnya lebih dari 1, negatif, atau pecahan; 3) Pada beberapa kasus fungsi integran yang memiliki sudut $\neq x$, seperti $2x, 3x, 4x$, dst, maka harus sudutnya harus diturunkan menggunakan aturan rantai. Sebagai acuan dasar, misalkan fungsi g mempunyai turunan yang kontinu pada $[a,b]$, dan misalkan fungsi f kontinu pada daerah hasil (range) dari g , maka suatu integral tentu fungsi trigonometri harus dapat diuraikan seperti berikut.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

(Purcell & Vaberg, 2015)

dengan $u = g(x)$

Berdasarkan rumus di atas dan rumus dasar integral tentu, maka misalkan F merupakan turunan dari f berlaku:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Berdasarkan teorema di atas pada integral tak tentu, maka untuk integral tentu juga berlaku:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Karena merupakan integral dari fungsi trigonometri, maka acuannya adalah rumus dasar integral trigonometri berikut.

- a. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- b. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- c. $\int -\sin x \, dx = \cos x + c$
- d. $\int -\cos x \, dx = -\sin x + c$
- e. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
- f. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$
- g. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
- h. $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

(Anton, Bivens, & Davis, 2012)

Selain acuan tersebut, untuk sudut yang $\neq x$ perlu diperhatikan aturan rantai fungsi trigonometri dalam penyelesaiannya. Aturan rantai fungsi trigonometri didefinisikan sebagai salah satu metode turunan fungsi trigonometri yang memisalkan sudut yang diketahui menjadi fungsi lain agar dapat diturunkan dengan aturan bentuk baku, uraiannya sebagai berikut.

Jika diketahui fungsi $y = \sin ax$, dengan $a \neq 0$, maka dengan memisalkan u sebagai ax , turunannya dapat ditulis:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

(E.Vaberg, Purcell, & Rigdon, 2007)

2. Langkah-langkah Menyelesaikan Integral Tentu Fungsi Trigonometri Dengan Aturan Substitusi

Untuk memudahkan penyelesaian persoalan integral tentu dengan aturan substitusi, perlu diperhatikan langkah-langkah berikut.

- Pastikan fungsi integran berbentuk dasar $\int [g(x)]^r g'(x) dx$. Jika belum, ubahlah menjadi bentuk tersebut
- Misalkan bilangan pokok dari fungsi integran yang berpangkat lebih dari 1, negatif, atau pecahan menjadi fungsi u
- Turunkan fungsi u sehingga diperoleh $du = \dots dx$
- Nyatakan nilai dari dx agar sesuai dengan soal yang diberikan, kemudian substitusikan pemisalan tadi ke integral semula
- Tentukan interval baru dengan mensubstitusikan interval $[a, b]$ ke dalam fungsi u , sehingga interval π radian menjadi bilangan real
- Ubah $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ menjadi $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$
- Integralkan $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$

Contoh:

Selesaikan integral tentu fungsi trigonometri berikut dengan menggunakan aturan substitusi.

- $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, dx$
- $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cdot \cos x \, dx$
- $\int_0^{\pi/4} \sin^3 2x \cdot \cos 2x \, dx$
- $\int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot 2\sin x \, dx$
- $\int_0^{\pi/2} (\sin^5 x + 1) \cdot 3\cos x \, dx$
- $\int_0^{\pi/2} (\sin^3 x - 2) \cdot 2\cos x \, dx$
- $\int_0^{\pi/2} (2 - \cos^2 x) \cdot 2\sin x \, dx$
- $\int_0^{\pi/4} \tan x \cdot \sec^2 x \, dx$
- $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$
- $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2x \cdot \sin 2x \, dx$

Penyelesaian:

a. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, dx$

Misal:

$$u = \cos x,$$

Maka:

$$du = -\sin x \, dx$$

$$-du = \sin x \, dx$$

Untuk $x = 0$, maka $u = 1$

Untuk $x = \frac{\pi}{2}$, maka $u = 0$

Sehingga :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, dx &= \int_1^0 u^2 (-du) \\ &= -\int_1^0 u^2 \, du \\ &= \left[-\frac{u^{2+1}}{2+1} \right]_1^0 \\ &= \left[-\frac{u^3}{3} \right]_1^0 \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos x \, dx$

Misal:

$$u = \sin x$$

Maka:

$$du = \cos x \, dx$$

Untuk $x = 0 \rightarrow u = \sin 0 = 0$

Untuk $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos x \, dx &= \int_0^1 u^5 \, du \\ &= \left[\frac{u^{5+1}}{5+1} \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{u^6}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} - 0 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

c. $\int_0^{\pi/4} \sin^3 2x \cdot \cos 2x \, dx$

Misal:

$$u = \sin 2x$$

Gunakan aturan rantai untuk menentukan turunan dari fungsi u , seperti uraian berikut.

Misal:

$$v = 2x \rightarrow u = \sin v \text{ (dimisalkan menjadi } v \text{ karena } u \text{ sudah digunakan)}$$

Maka:

$$\frac{dv}{dx} = 2$$

$$\frac{du}{dv} = \cos v$$

Dengan aturan rantai diperoleh:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{du}{dv}$$

$$= 2 \cdot \cos v$$

$$= 2 \cdot \cos 2x$$

$$du = 2 \cos 2x \, dx$$

$$\frac{1}{2} du = \cos 2x \, dx$$

$$\text{Untuk } x = 0 \rightarrow u = \sin 2x = \sin 0 = 0$$

$$\text{Untuk } x = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1$$

Sehingga:

$$\int_0^{\pi/4} \sin^3 2x \cdot \cos 2x \, dx = \int_0^1 u^3 \left(\frac{1}{2} du\right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 u^3 du$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{u^{3+1}}{3+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - 0 \right)$$

$$= \frac{1}{8}$$

d. $\int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot 2 \sin x \, dx$

Misal:

$$u = \cos x$$

Maka:

$$du = -\sin x \, dx$$

$$-du = \sin x \, dx$$

Untuk $x = 0$, maka $u = \cos 0 = 1$

Untuk $x = \pi$, maka $u = \cos \pi = -1$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot 2 \sin x \, dx &= 2 \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x \, dx \\ &= 2 \int_1^{-1} u^2 (-du) \\ &= -2 \int_1^{-1} u^2 \, du \\ &= -2 \left[\frac{u^{2+1}}{2+1} \right]_1^{-1} \\ &= 2 \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^{-1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot ((-1)^3 - 1^3) \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

e. $\int_0^{\pi/2} (\sin^5 x + 1) \cdot 3 \cos x \, dx$

Untuk model fungsi integran seperti no.5 perhatikan uraian berikut.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\sin^5 x + 1) \cdot 3 \cos x \, dx &= 3 \int_0^{\pi/2} (\sin^5 x + 1) \cos x \, dx \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} (\sin^5 x \cdot \cos x + \cos x) \, dx \\ &= 3 \left(\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cdot \cos x \, dx}_A + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx}_B \right) \end{aligned}$$

Selesaikan integral A dengan aturan substitusi dan B dengan aturan integral tentu

Untuk $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cdot \cos x \, dx$

Misal:

$$u = \sin x$$

Maka:

$$du = \cos x \, dx$$

Untuk $x = 0$, maka $u = \sin 0 = 0$

Untuk $x = \frac{\pi}{2}$, maka $u = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cdot \cos x \, dx &= \int_0^1 u^5 \, du \\ &= \left[\frac{u^{5+1}}{5+1} \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{u^6}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} - 0 \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Untuk $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ menggunakan aturan integral tentu sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx &= [\sin x]_0^{\pi/2} \\ &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Jadi:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} (\sin^5 x + 1) \cdot 3 \cos x \, dx &= 3 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cdot \cos x \, dx + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \right) \\ &= 3 \left(\frac{1}{6} + 1 \right) \\ &= 3 \left(\frac{7}{6} \right) \\ &= \frac{21}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{f. } \int_0^{\pi/2} (\sin^3 x - 2) \cdot 2 \cos x \, dx &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin^3 x - 2) \cdot \cos x \, dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin^3 x \cdot \cos x - 2 \cos x) \, dx \\ &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cdot \cos x \, dx - \int_0^{\pi/2} 2 \cos x \, dx \right)\end{aligned}$$

Untuk $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$

Misal:

$u = \sin x$

Maka:

$du = \cos x \, dx$

Untuk $x = 0$, maka: $u = \sin 0 = 0$

Untuk $x = \frac{\pi}{2}$, maka: $u = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cdot \cos x \, dx &= \int_0^1 u^3 \, du \\ &= \left[\frac{u^{3+1}}{3+1} \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - 0 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Untuk $\int_0^{\pi/2} 2 \cos x \, dx$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} 2 \cos x \, dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \\ &= 2[\sin x]_0^{\pi/2} \\ &= 2\left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) \\ &= 2(1 - 0) \\ &= 2\end{aligned}$$

Jadi:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} (\sin^3 x - 2) \cdot 2 \cos x \, dx &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cdot \cos x \, dx - \int_0^{\pi/2} 2 \cos x \, dx \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{4} - 2 \right) \\ &= -\frac{14}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{g. } \int_0^{\pi/2} (2 - \cos^2 x) \cdot 2 \sin x \, dx &= 2 \int_0^{\pi/2} (2 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (2 \sin x - \cos^2 x \cdot \sin x) \, dx \\ &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} 2 \sin x \, dx - \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin x \, dx \right)\end{aligned}$$

Untuk $\int_0^{\pi/2} 2 \sin x \, dx$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} 2 \sin x \, dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \\ &= 2[-\cos x]_0^{\pi/2} \\ &= 2\left(-\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0)\right) \\ &= 2(0 - (-1))\end{aligned}$$

$$= 2$$

Untuk $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin x \, dx$

Misal:

$$u = \cos x$$

Maka:

$$du = -\sin x \, dx$$

Untuk $x = 0$, maka $u = \cos 0 = 1$

Untuk $x = \frac{\pi}{2}$, maka $u = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin x \, dx &= \int_1^0 u^2 \, du \\ &= \left[\frac{u^{2+1}}{2+1} \right]_1^0 \\ &= \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^0 \\ &= 0 - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Jadi:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (2 - \cos^2 x) \cdot 2 \sin x \, dx &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} 2 \sin x \, dx - \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin x \, dx \right) \\ &= 2 \left(2 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

h. $\int_0^{\pi/4} \tan x \cdot \sec^2 x \, dx$

Misal:

$$u = \tan x$$

Maka:

$$du = \sec^2 x \, dx$$

Untuk $x = 0$, maka $u = \tan 0 = 0$

Untuk $x = \frac{\pi}{4}$, maka $u = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \tan x \cdot \sec^2 x \, dx &= \int_0^1 u \, du \\ &= \left[\frac{u^{1+1}}{1+1} \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} - 0 \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{i. } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(\sin x)^{1/2}} dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{-1/2} \cdot \cos x dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2} x \cdot \cos x dx
 \end{aligned}$$

Misal:

$$u = \sin x$$

Maka:

$$du = \cos x dx$$

Untuk $x = 0$, maka $u = \sin 0 = 0$

Untuk $x = \frac{\pi}{2}$, maka $u = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx &= \int_0^1 u^{-1/2} du \\
 &= \left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 \\
 &= \left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 \\
 &= 2[\sqrt{u}]_0^1 \\
 &= 2(\sqrt{1} - \sqrt{0}) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\text{j. } \int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2x \cdot \sin 2x dx$$

Misal:

$$u = \cos 2x$$

Gunakan aturan rantai untuk menentukan turunan dari fungsi u , seperti uraian berikut.

Misal:

$$v = 2x \rightarrow u = \cos v \text{ (dimisalkan menjadi } v \text{ karena } u \text{ sudah digunakan)}$$

Maka:

$$\frac{dv}{dx} = 2$$

$$\frac{du}{dv} = -\sin v$$

Dengan aturan rantai diperoleh:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{du}{dv}$$

$$= 2 \cdot (-\sin v)$$

$$= -2 \cdot \sin 2x$$

$$du = -2 \sin 2x \, dx$$

$$-\frac{1}{2} du = \sin 2x \, dx$$

$$\text{Untuk } x = 0 \rightarrow u = \cos 2x = \cos 0 = 1$$

$$\text{Untuk } x = \frac{\pi}{6} \rightarrow u = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2x \cdot \sin 2x \, dx &= \int_1^{1/2} u^{-3} \left(-\frac{1}{2} du\right) \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^{1/2} u^{-3} du \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{u^{-3+1}}{-3+1} \right]_1^{1/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{u^{-2}}{-2} \right]_1^{1/2} \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{u^2} \right]_1^{1/2} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{1^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (4 - 1) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

C. Latihan Soal

Selesaikan soal-soal berikut dengan aturan substitusi integral tentu!

1. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 x - 2) \cdot \cos x \, dx$
2. $\int_0^{\pi} 3 \cos^2 x \cdot \sin x \, dx$
3. $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 2x \cdot \sin 2x \, dx$
4. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x \cdot \operatorname{cosec}^2 x \, dx$
5. $\int_0^{3\pi/4} \tan x \cdot \sec^2 x \, dx$

6. $\int_{-\pi/4}^0 (\tan x + 2) \cdot \sec^2 x \, dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{4+3 \sin x}} \, dx$
8. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{2-\cos x}} \, dx$
9. $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2x \cdot \sin 2x \, dx$
10. $\int_{\pi}^{3\pi/2} (1 - \sin 2x)^{3/2} \cdot \cos 2x \, dx$

D. Daftar Pustaka

- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). Calculus 10th Edition. New York: Laurie Rosatone.
- E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). Calculus (Ninth Edition). Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.
- Purcell, E. J., & Vaberg, D. (2015). Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid Satu). Jakarta: Erlangga.

PERTEMUAN KE 9

ATURAN SUBSTITUSI INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI EKSPONENSIAL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini mahasiswa mampu menyelesaikan integral tak tentu fungsi eksponensial dengan aturan substitusi.

B. Uraian Materi

1. Definisi Fungsi Eksponensial

Sebelum membahas integral fungsi eksponensial, perlu diketahui terlebih dahulu mengenai definisi dari bilangan eksponensial. Konsep dari bilangan eksponensial ditemukan oleh ahli matematika asal Swiss, Leonard Euler. Bilangan eksponensial merupakan suatu bilangan irrasional yang dilambangkan dengan huruf e yang berasal dari bilangan Euler, yaitu sebuah bilangan yang merupakan nilai pendekatan dari bentuk $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Untuk nilai n mendekati tak hingga yang ditemukan pada tahun 1683 oleh Jacob Bernoulli, Euler memberikan ide mengenai bilangan e pada tahun 1748, dengan menggunakan aturan limit sebagai berikut.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Yang dapat diubah menjadi:

$$e = \lim_{n \rightarrow 0} (1 + n)^{1/n}$$

(Anton, Bivens, & Davis, 2012)

Jika rumus tersebut disajikan ke dalam tabel dengan pendekatan e dengan $x \rightarrow +\infty$ seperti Tabel 9.1.

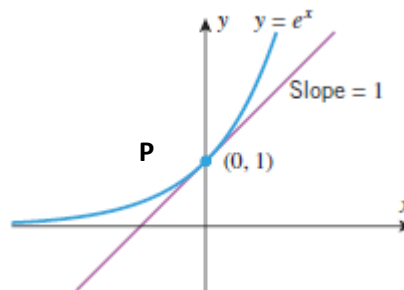
Tabel 9.1 Hasil dari $(1+n)^{(1/n)}$ Dengan Pendekatan $x \rightarrow +\infty$

x	$1 + \frac{1}{x}$	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	2	≈ 2.000000
10	1.1	2.593742
100	1.01	2.704814
1000	1.001	2.716924
10,000	1.0001	2.718146
100,000	1.00001	2.718268
1,000,000	1.000001	2.718280

Dari formulasi tersebut, Euler memperoleh pendekatan nilai e sampai 18 digit yaitu:

$$e = 2,718281828459045235$$

Misalkan diketahui $b = e$ yang merupakan satu-satunya basis fungsi (konstanta) dari kemiringan garis singgung dari kurva $y = b^x$ pada titik P yang merupakan perpotongan dengan koordinat y seperti pada Gambar 9.1 berikut.



Gambar 9.7 Sketsa Konsep Fungsi Eksponensial

Jadi, misalkan garis singgung ke $y = e^x$ pada $(0,1)$ memiliki kemiringan ($slope$) = 1, maka fungsi $f(x) = e^x$ disebut fungsi eksponensial alami (*natural exponential function*) (Anton, Bivens, & Davis, 2012). Namun untuk menyederhanakan bahasa, orang sering menyebutnya dengan fungsi eksponensial, yang ditulis:

$$\exp(x) \text{ atau } e^x$$

2. Integral Tak Tentu Fungsi Eksponensial

Untuk mengetahui integral fungsi eksponensial perlu diketahui terlebih dahulu turunan dari fungsi eksponensial berikut.

$$\text{Jika } f(x) = e^x, \text{ maka } f'(x) = e^x$$

Dari turunan tersebut dapat disimpulkan bahwa integral fungsi eksponensial dapat ditulis:

$$\int e^x dx = e^x + c$$

(Edwards & H., 2010)

Pengembangan dari rumus di atas adalah dengan menggunakan aturan substitusi dengan bentuk dasar sebagai berikut.

$$\int e^u dx = e^u + c$$

(Slamet H.W., 2003)

3. Langkah-langkah Menyelesaikan Integral Tak Tentu Fungsi Eksponensial Dengan Aturan Substitusi

Untuk memudahkan penyelesaian persoalan integral tak tentu fungsi eksponensial dengan aturan substitusi, perlu diperhatikan langkah-langkah berikut.

- Pastikan fungsi integran berbentuk dasar $\int [g(x)]^r g'(x) dx$. Jika belum, ubahlah menjadi bentuk tersebut
- Misalkan pangkat dari fungsi eksponensial menjadi fungsi u
- Turunkan fungsi u sehingga diperoleh $du = \dots dx$
- Nyatakan nilai dari dx agar sesuai dengan soal yang diberikan, kemudian substitusikan pemisalan tadi ke integral semula

Contoh:

Selesaikan integral fungsi eksponensial berikut menggunakan aturan substitusi integral tak tentu.

- $\int e^{2x} dx$
- $\int 3e^{7x} dx$

c. $\int \frac{1}{e^{5x}} dx$

d. $\int x e^{x^2} dx$

e. $\int e^{5x+3} dx$

f. $\int (x+3)e^{x^2+6x+7} dx$

g. $\int e^{x+e^x} dx$

h. $\int \frac{e^x}{e^x+5} dx$

i. $\int \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}} dx$

j. $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} dx$

Penyelesaian:

a. $\int e^{2x} dx$

Misal $u = 2x$,

Maka $du = 2x dx \rightarrow \frac{1}{2} du = dx$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} dx &= \int e^u \left(\frac{1}{2} du\right) \\ &= \frac{1}{2} \int e^u du \\ &= \frac{1}{2} e^u + c \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} + c \end{aligned}$$

b. $\int 3e^{7x} dx = 3 \int e^{7x} dx$

Misal $u = 7x$

Maka $du = 7 dx$

$$\frac{1}{7} du = dx$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} 3 \int e^{7x} dx &= 3 \int e^u dx \\ &= 3 \int e^u \left(\frac{1}{7} du\right) \\ &= \frac{3}{7} \int e^u du \\ &= \frac{3}{7} e^u + c \\ &= \frac{3}{7} e^{7x} + c \end{aligned}$$

c. $\int \frac{1}{e^{5x}} dx = \int e^{-5x} dx$

Misal $u = -5x$

maka $du = -5 dx$

$$-\frac{1}{5} du = dx$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int e^{-5x} dx &= \int e^u \left(-\frac{1}{5} du\right) \\&= -\frac{1}{5} \int e^u du \\&= -\frac{1}{5} e^u + c \\&= -\frac{1}{5} e^{-5x} + c \\&= -\frac{1}{5e^{5x}} + c\end{aligned}$$

d. $\int xe^{x^2} dx$

Misal $u = x^2$

maka $du = 2x dx$

$$\frac{1}{2} du = x dx$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2} dx &= \int e^{x^2} x dx \\&= \int e^u \left(\frac{1}{2} du\right) \\&= \frac{1}{2} \int e^u du \\&= \frac{1}{2} e^u + c \\&= \frac{1}{2} e^{x^2} + c\end{aligned}$$

e. $\int e^{5x+3} dx$

Misal:

$$u = 5x + 3$$

Maka:

$$du = 5 dx$$

$$\frac{1}{5} du = dx$$

Sehingga:

$$\int e^{5x+3} dx = \int e^u \cdot \frac{1}{5} du$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{5} \int e^u du \\
 &= \frac{1}{5} e^u + c \\
 &= \frac{1}{5} e^{5x+3} + c
 \end{aligned}$$

f. $\int (x+3)e^{x^2+6x+7} dx$

Misal:

$$u = x^2 + 6x + 7$$

Maka:

$$du = (2x + 6) dx$$

$$\frac{1}{2} du = (x + 3) dx$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int (x+3)e^{x^2+6x+7} dx &= \int e^u \cdot \frac{1}{2} du \\
 &= \frac{1}{2} \int e^u du \\
 &= \frac{1}{2} e^u + c \\
 &= \frac{1}{2} e^{x^2+6x+7} + c
 \end{aligned}$$

g. $\int e^{x+e^x} dx$

Karena koefisien variabel integrasinya belum memiliki bentuk dasar, maka harus diubah dulu menjadi bentuk berikut.

$$\begin{aligned}
 \int e^{x+e^x} dx &= \int e^x \cdot e^{e^x} dx \\
 &= \int e^{e^x} e^x dx
 \end{aligned}$$

Misal:

$$u = e^x$$

Maka:

$$du = e^x dx$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int e^{e^x} e^x dx &= \int e^u du \\
 &= e^u + c \\
 &= e^{e^x} + c
 \end{aligned}$$

h. $\int \frac{e^x}{e^x+5} dx$

Ubah menjadi bentuk berikut agar lebih mudah diintegrasikan.

$$\int \frac{e^x}{e^x+5} dx = \int (e^x + 5)^{-1} e^x dx$$

Misal:

$$u = e^x + 5$$

Maka:

$$du = e^x dx$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int (e^x + 5)^{-1} e^x dx &= \int u^{-1} du \\ &= \ln u + c \\ &= \ln(e^x + 5) + c \end{aligned}$$

$$\text{i. } \int \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}} dx = \int (e^{3x} + e^{-3x})^{-1} (e^{3x} - e^{-3x}) dx$$

Misal:

$$u = e^{3x} - e^{-3x}$$

Maka du dapat dicari dengan menggunakan aturan rantai sebagai berikut.

1) Untuk e^{3x}

Misal:

$$v = e^{3x}$$

$$w = 3x$$

Maka:

$$v = e^w \rightarrow \frac{dv}{dw} = e^w$$

$$w = 3x \rightarrow \frac{dw}{dx} = 3$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} \\ &= e^w \cdot 3 \\ &= 3e^{3x} \end{aligned}$$

2) Untuk e^{-3x}

Misal:

$$v = e^{-3x}$$

$$w = -3x$$

Maka:

$$v = e^w \rightarrow \frac{dv}{dw} = e^w$$

$$w = -3x \rightarrow \frac{dw}{dx} = -3$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dx} &= \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} \\ &= e^w \cdot -3 \\ &= -3e^{-3x}\end{aligned}$$

Jadi:

$$\begin{aligned}du &= 3e^{3x} + (-3e^{-3x}) \\ &= (3e^{3x} - 3e^{-3x})dx\end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} du = (e^{3x} - e^{-3x})dx$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int (e^{3x} + e^{-3x})^{-1} (e^{3x} - e^{-3x})dx &= \int u^{-1} \cdot \frac{1}{3} du \\ &= \frac{1}{3} \int u^{-1} du \\ &= \frac{1}{3} \ln u + c \\ &= \frac{1}{3} \ln(e^{3x} + e^{-3x}) + c\end{aligned}$$

j. $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} dx$

Karena bilangan pokok dari fungsi integran terdiri dari 2 jenis bilangan (eksponensial dan bulat), maka harus diubah dulu menjadi bilangan pokok yang keduanya merupakan bilangan eksponensial, seperti uraian berikut.

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \right) \frac{e^{-x}}{e^{-x}} dx &= \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} dx \\ &= \int (e^x - e^{-x})^{-1} (e^x + e^{-x}) dx\end{aligned}$$

Misal:

$$u = e^x - e^{-x}$$

Maka:

$$du = (e^x + e^{-x})dx$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int (e^x - e^{-x})^{-1} (e^x + e^{-x}) dx &= \int u^{-1} du \\ &= \ln u + c \\ &= \ln(e^x - e^{-x}) + c\end{aligned}$$

C. Latihan Soal

Selesaikan integral fungsi eksponensial berikut menggunakan aturan substitusi integral tak tentu.

1. $\int e^{x+3} dx$
2. $\int e^{5x} dx$
3. $\int x e^{-x^2} dx$
4. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$
5. $\int 2x^2 e^{-4x^3} dx$
6. $\int \frac{e^{5/x}}{x^2} dx$
7. $\int \left(\frac{2}{e^{2x}} + e^{\frac{1}{x}} \right) dx$
8. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
9. $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$
10. $\int e^{\sin x} \cos x dx$

D. Daftar Pustaka

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). Calculus 10th Edition. New York: Laurie Rosatone.

Edwards, R. L., & H., B. (2010). Calculus (Ninth Edition). New York: Richard Stratton.

Slamet H.W. (2003). Kalkulus 2. Surakarta: UMS.

PERTEMUAN KE 10

ATURAN SUBSTITUSI INTEGRAL TENTU FUNGSI EKSPONENSIAL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini mahasiswa mampu menyelesaikan integral tentu fungsi eksponensial dengan aturan substitusi.

B. Uraian Materi

1. Hubungan Fungsi Eksponensial dengan Logaritma Natural

Fungsi eksponensial adalah invers dari fungsi logaritma natural ($\ln$), yang dapat ditulis:

$$y = \ln x \leftrightarrow x = e^y$$

(Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016)

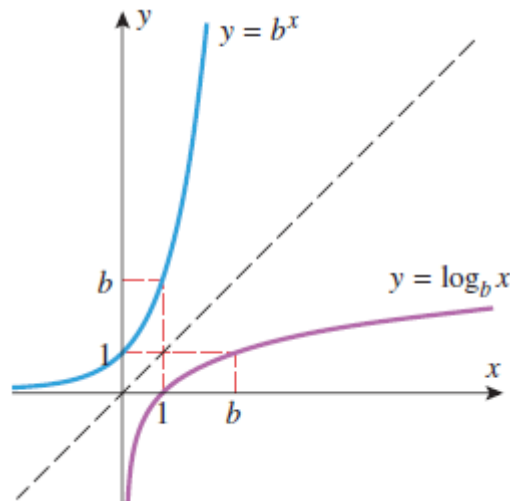
$\ln$ merupakan suatu konsep pengembangan dari aturan logaritma. Logaritma dengan basis angka 10 disebut logaritma umum, yang disimbolkan dengan $^{10}\log x$ atau $\log_{10} b$, namun umumnya ditulis $\log x$. Misalkan diketahui $b > 0$ dan $b \neq 1$, maka nilai positif dari x dapat ditulis

$$\log_b x$$

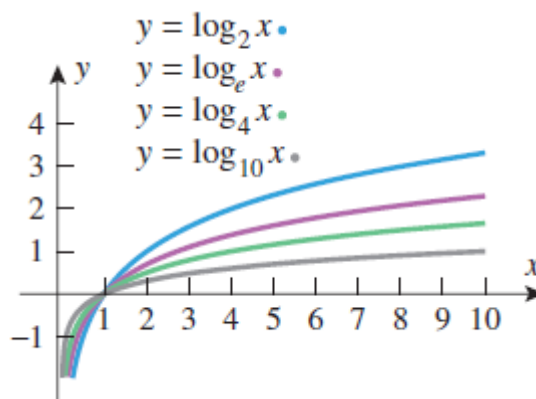
dengan $f(x) = \log_b x$ dapat disebut fungsi logaritma dengan basis b .

(Anton, Bivens, & Davis, 2012)

Dari definisi tersebut, fungsi logaritma dapat didefinisikan sebagai kebalikan (invers) dari fungsi eksponensial. Perhatikan Gambar 10.1. berikut.

Gambar 18 Grafik Fungsi $y = b^x$ dan $y = \log_b x$

Jika $b > 0$ dan $b \neq 1$, maka grafik fungsi $y = b^x$ akan berimpit dengan sumbu x , sehingga b^x memiliki invers, yaitu $y = \log_b x$. Dari teorema ini, jika fungsi $y = \log_b x$ digambarkan dengan suatu grafik dengan berbagai nilai b (misal: 2, e , 4, dan 10) seperti Gambar 10.2. berikut.

Gambar 19 Grafik $y = \log_b x$ dengan $b = 2, e, 4$, dan 10

Pada Gambar 10.2 dapat dilihat bahwa pada semua basis b , semua kurva melewati titik $(1, 0)$. Karena salah satu basis merupakan bilangan eksponensial (e), maka fungsi tersebut disebut fungsi logaritma natural karena fungsi $y = \log_e b$ merupakan invers dari fungsi eksponensial e^x . Secara umum, fungsi logaritma natural dari x ditulis $\ln x$ (dibaca len x). Perhatikan teorema berikut.

Misal:

Untuk $\ln 1 = 0$, maka $e^0 = 1$

Untuk $\ln e = 1$, maka $e^1 = e$

Untuk $\ln \frac{1}{e} = -1$, maka $e^{-1} = \frac{1}{e}$

Untuk $\ln e^2 = 2$, maka $e^2 = 2$

Sehingga dari permisalan tersebut dapat diperoleh teorema bahwa:

$$y = \ln x \text{ jika dan hanya jika } x = e^y$$

(Purcell & Vaberg, 2015)

2. Sifat-sifat fungsi eksponensial

Dengan adanya teorema pada poin 1, maka fungsi eksponensial juga memiliki sifat yang perlu diketahui untuk mendukung perhitungan integral tentu fungsi eksponensial, sifat-sifat tersebut adalah:

- a. $e^{\ln x} = x$, untuk semua $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$
- b. $\ln(e^x) = x$, $x \in \mathbb{R}$

Contoh:

Selesaikan fungsi $\ln$ dan eksponensial berikut dengan menggunakan sifat-sifat fungsi eksponensial!

- a. $2 \ln e^0$
- b. $-3 \ln e^1$
- c. $-\ln e^{2x}$
- d. $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{e}$
- e. $\ln \sqrt{e}$
- f. $\ln e^{\sin x}$
- g. $e^{\ln 2}$
- h. $e^{\ln(x^2+1)}$
- i. $e^{\ln 2^3}$
- j. $(e^{\ln 2})^3$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{a. } 2 \ln e^0 &= 2 \cdot \ln 1 \\ &= 2 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } -3 \ln e^1 &= -3 \cdot \ln e \\ &= -3 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$= -3$$

$$\begin{aligned} \text{c. } -\ln e^{2x} &= -1.2x \\ &= -2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \frac{1}{2} \ln \frac{1}{e} &= \frac{1}{2} \ln e^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-1) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } \ln \sqrt{e} &= \ln e^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{f. } \ln e^{\sin x} = \sin x$$

$$\text{g. } e^{\ln 2} = 2$$

$$\text{h. } e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$$

$$\begin{aligned} \text{i. } e^{\ln 2^3} &= e^{\ln 8} \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j. } (e^{\ln 2})^3 &= 2^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

3. Integral Tentu dan Aturan Substitusi Fungsi Eksponensial

Sama dengan integral tentu fungsi lainnya, integral tentu fungsi eksponensial merupakan aplikasi dari integral tentu sebagai berikut.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016)

Untuk setiap batas integral tertentu, integral fungsi eksponensial harus diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi. Misalkan fungsi g mempunyai turunan yang kontinu pada $[a,b]$, dan misalkan fungsi f kontinu pada daerah hasil (*range*) dari g , maka :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

(Purcell & Vaberg, 2015)

dengan $u = g(x)$

Berdasarkan rumus di atas dan rumus dasar integral tentu, maka misalkan F merupakan turunan dari f berlaku :

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Berdasarkan teorema di atas pada integral tak tentu, maka untuk integral tentu juga berlaku :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

(Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016)

Karena merupakan integral dari fungsi eksponensial, maka acuannya adalah rumus dasar integral eksponensial sebagai berikut.

$$\int e^u dx = e^u + c$$

(Edwards & H., 2010)

3. Langkah-langkah Menyelesaikan Integral Tentu Fungsi Eksponensial Dengan Aturan Substitusi

Untuk memudahkan penyelesaian persoalan integral tentu fungsi eksponensial dengan aturan substitusi, perlu diperhatikan langkah-langkah berikut.

- Pastikan fungsi integran berbentuk dasar $\int [g(x)]^r g'(x) dx$. Jika belum, ubahlah menjadi bentuk tersebut
- Misalkan pangkat dari fungsi integran menjadi fungsi u
- Turunkan fungsi u sehingga diperoleh $du = \dots dx$
- Nyatakan nilai dari dx agar sesuai dengan soal yang diberikan, kemudian substitusikan pemisalan tadi ke integral semula
- Tentukan interval baru dengan mensubstitusikan interval $[a, b]$ ke dalam fungsi u
- Ubah $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ menjadi $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$
- Integralkan $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$

Contoh:

Tentukan nilai integral-integral tentu fungsi eksponensial berikut dengan menggunakan aturan substitusi!

- $\int_0^1 e^{2x-1} dx$
- $\int_{-1}^2 e^{x+1} dx$
- $\int_{\ln 1}^{\ln 3} e^x \sqrt[3]{e^x + 2} dx$
- $\int_0^{\ln 3} e^x (1 + e)^{1/2} dx$
- $\int_{\ln 1}^{\ln 2} e^x (1 - e)^3 dx$

Penyelesaian:

a. $\int_0^1 e^{2x-1} dx$

Misal:

$$u = 2x - 1$$

Maka:

$$du = 2 dx$$

$$\frac{1}{2} du = dx$$

Untuk $x = 0$, maka $u = -1$

Untuk $x = 1$, maka $u = 1$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{2x-1} dx &= \int_{-1}^1 e^u \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^u du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} [e^u]_{-1}^1 \\
 &= \frac{1}{2} (e^1 - e^{-1})
 \end{aligned}$$

Gunakan kalkulator scientific untuk menghitung hasilnya

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (2,718 - 0,368) \\
 &= \frac{1}{2} (2,35) \\
 &= 1,175
 \end{aligned}$$

b. $\int_{-1}^2 e^{x+1} dx$

Misal:

$$u = x + 1$$

Maka:

$$du = dx$$

Untuk $x = -1$, maka $u = 0$

Untuk $x = 2$, maka $u = 3$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 e^{x+1} dx &= \int_0^3 e^u du \\
 &= [e^u]_0^3 \\
 &= (e^3 - e^0) \\
 &= (20,086 - 1) \\
 &= 19,086
 \end{aligned}$$

c. $\int_{\ln 1}^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x} dx$

Harus diubah dulu menjadi bentuk baku sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \int_{\ln 1}^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x} dx &= \int_{\ln 1}^{\ln 2} e^x (e^x)^{1/2} dx \\
 &= \int_{\ln 1}^{\ln 2} (e^x)^{1/2} e^x dx
 \end{aligned}$$

Misal:

$$u = e^x$$

Maka:

$$du = e^x dx$$

Untuk $x = \ln 1$, maka $u = e^{\ln 1} = 1$

Untuk $x = \ln 2$, maka $u = e^{\ln 2} = 2$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_{\ln 1}^{\ln 2} (e^x)^{1/2} e^x dx &= \int_1^2 u^{1/2} du \\
 &= \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^2 \\
 &= \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\
 &= \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\
 &= \frac{2}{3} [u\sqrt{u}]_1^2 \\
 &= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}) \\
 &= \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

d. $\int_0^{\ln 3} e^x (1 + e^x)^{1/2} dx$

Misal:

$$u = 1 + e^x$$

Maka:

$$du = e^x dx$$

Untuk $x = 0$, maka $u = 1 + e^0 = 2$

Untuk $x = \ln 3$, maka $u = 1 + e^{\ln 3} = 4$

sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\ln 3} e^x (1 + e^x)^{1/2} dx &= \int_2^4 u^{1/2} du \\
 &= \frac{2}{3} [u^{3/2}]_2^4 \\
 &= \frac{2}{3} (4^{3/2} - 2^{3/2}) \\
 &= \frac{16 - 4\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

e. $\int_{\ln 1}^{\ln 2} e^x (3 - e^x)^3 dx$

Misal:

$$u = 3 - e^x$$

Maka:

$$du = -e^x dx$$

Untuk $x = \ln 1$, maka $u = 3 - e^{\ln 1} = 2$

Untuk $x = \ln 2$, maka $u = 3 - e^{\ln 2} = 1$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_{\ln 1}^{\ln 2} e^x (3 - e^x)^3 dx &= \int_2^1 u^3 du \\
 &= \frac{1}{4} [u^4]_2^1 \\
 &= \frac{1}{4} ((1)^4 - (2)^4) \\
 &= \frac{1 - 16}{4} \\
 &= \frac{-15}{4}
 \end{aligned}$$

C. Latihan Soal

Tentukan nilai integral-integral tentu fungsi eksponensial berikut dengan menggunakan aturan substitusi

1. $\int_0^1 e^{3x-1} dx$
2. $\int_{-1}^3 2e^{4x+2} dx$
3. $\int_{\ln 1}^{\ln 3} e^x (-e^x + 4)^5 dx$
4. $\int_0^{\ln 2} 4e^x (3 + e^x)^3 dx$
5. $\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 4} dx$
6. $\int_{-\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x - 2)^2} dx$
7. $\int_{\ln 1}^{\ln 3} e^x \sqrt[3]{e^x + 2} dx$
8. $\int_{\ln 1}^{\ln 2} 3e^x \sqrt[5]{e^x + 1} dx$
9. $\int_{-\ln 1}^{\ln 3} \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$
10. $\int_{-\ln 1}^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt[3]{e^x - 1}} dx$

D. Daftar Pustaka

- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). Calculus 10th Edition. New York: Laurie Rosatone.
- Hass, J., Weir, M. D., George B. Thomas, J., & Hell, C. (2016). University Calculus Early Transcendental. New York: Pearson Education, Inc.
- Purcell, E. J., & Vaberg, D. (2015). Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid Satu). Jakarta: Erlangga.

PERTEMUAN 11

INTEGRAL FUNGSI RASIONAL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini mahasiswa mampu menyelesaikan aturan dasar integral fungsi rasional.

B. Uraian Materi

1. Definisi fungsi rasional

Fungsi rasional adalah suatu fungsi yang dinyatakan dalam bentuk $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, dimana $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi aljabar suku banyak (polinom) dengan syarat derajat polinom pembilang lebih kecil dari penyebut dan $g(x) \neq 0$. Fungsi aljabar suku banyak adalah suatu fungsi yang dinyatakan sebagai berikut.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n, n = 1, 2, 3, \dots$$

(Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016)

Fungsi rasional dibagi menjadi 2 macam, yaitu:

a. Fungsi Rasional Sejati

Fungsi rasional sejati adalah fungsi rasional yang derajat polinom pembilangnya lebih besar daripada derajat polinom penyebutnya.

(E.Vaberg, Purcell, & Rigdon, 2007)

Contoh:

$$1) f(x) = \frac{1-x}{x^2-3x+2}$$

$$2) f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$$

b. Fungsi Rasional Tidak Sejati

Fungsi rasional tidak sejati adalah fungsi rasional yang derajat polinom pembilangnya lebih besar atau sama dengan derajat polinom penyebutnya.

(E.Vaberg, Purcell, & Rigdon, 2007)

Contoh:

$$1) f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x^2-1}$$

$$2) f(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}$$

Karena syarat fungsi rasional harus memiliki derajat polinom pembilang lebih kecil dari penyebut, maka untuk fungsi rasional tidak sejati harus diubah menjadi fungsi rasional sejati dengan cara pembagian bersusun. Misal pada contoh no.2 sebagai berikut.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 3 \\
 x^3 + 5x \overline{) x^5 + 2x^3 - x + 1} \\
 \underline{x^5 + 5x^3} \\
 - 3x^3 - x \\
 \underline{- 3x^3 - 15x} \\
 14x + 1
 \end{array}$$

Dengan menggunakan rumus pembagian $H(x) = \text{Hasil} + \frac{\text{Sisa}}{\text{Pembagi}}$, maka diperoleh:

$$f(x) = \frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x} = x^2 - 3 + \frac{14x + 1}{x^3 + 5x}$$

2. Integral Fungsi Rasional

Pada subbab ini akan ditunjukkan bagaimana mengekspresikan fungsi rasional (hasil bagi polinomial) sebagai jumlah fraksi yang lebih sederhana, yang disebut fraksi parsial (Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016), agar lebih mudah diintegrasikan. Dalam menentukan integral fungsi rasional, langkah yang ditempuh adalah:

- Nyatakan integrannya dalam bentuk fungsi rasional sejati.
- Faktorkan penyebut $g(x)$ dari fungsi rasional $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ sampai tidak dapat difaktorkan lagi.
- Pada poin b, $g(x)$ dapat berupa kombinasi antara:
 - Fungsi linear berbeda, dengan bentuk sebagai berikut.

$$g(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \dots \text{ dengan } a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$$

- Fungsi linear berulang, dengan bentuk sebagai berikut.

$$g(x) = (x-a)^n$$

$$g(x) = (x-a)(x-a)(x-a) \dots \text{ sebanyak } n, \text{ dengan } a \in \mathbb{R}$$

- Fungsi liner dan kuadrat, dengan bentuk sebagai berikut.

$$g(x) = (x-a)(ax^2 + bx + c)$$

atau

$$g(x) = (ax^2 + bx + c)(px^2 + qx + r) \dots \text{ fungsi kuadrat berbeda}$$

$$g(x) = (ax^2 + bx + c)^n \dots \text{ fungsi kuadrat berulang}$$

4) Nyatakan integran menjadi bentuk penjumlahan n-pecahan parsial sehingga integran dapat ditentukan integralnya, dengan bentuk sebagai berikut.

$$a) \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(ax_1+b_1)} + \frac{A_2}{(ax_2+b_2)} + \dots \quad (\text{penyebut kombinasi linier berbeda})$$

$$b) \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots \quad (\text{kombinasi linier berulang})$$

$$c) \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \dots \quad (\text{kombinasi kuadrat berbeda})$$

(Anton, Bivens, & Davis, 2012)

5) Integralkan secara keseluruhan jumlah n-pecahan parsial tersebut yang merupakan hasil akhir pengintegralan dengan terlebih dahulu menentukan konstanta $A_1, A_2, \dots A_n$ dan $B_1, B_2, \dots B_n$.

Contoh:

Tentukan hasil dari integral fungsi rasional berikut.

$$a. \int \frac{2}{x^2-1} dx$$

$$b. \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx$$

$$c. \int \frac{x+1}{x-1} dx$$

$$d. \int \frac{5x-3}{x^3-2x^2-3x} dx$$

Penyelesaian:

$$a. \int \frac{2}{x^2-1} dx$$

Karena intergran sudah berbentuk fungsi rasional sejati, maka langkah selanjutnya adalah memfaktorkan penyebutnya.

$$\int \frac{2}{x^2-1} dx = \int \frac{2}{(x-1)(x+1)} dx$$

Langkah berikutnya adalah mengubahnya bentuk $\frac{2}{(x-1)(x+1)}$ agar bisa diintegralkan seperti uraian berikut.

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{(x-1)(x+1)} dx &= \int \left(\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{(A+B)x+(A-B)}{(x-1)(x+1)} \right) dx \end{aligned}$$

Dengan **sifat kesamaan fungsi** diperoleh $A + B = 0$, $A - B = 2$, maka didapat $A = 1$ dan $B = -1$, sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2}{x^2-1} dx &= \int \left(\frac{1}{(x-1)} + \frac{-1}{(x+1)} \right) dx \\
 &= \int \frac{1}{(x-1)} dx - \int \frac{1}{(x+1)} dx \\
 &= \ln|x-1| - \ln|x+1| + c \\
 &= \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c
 \end{aligned}$$

2. $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx$

Seperti no.1, integran sudah berbentuk fungsi rasional sejati, maka langkah berikutnya seperti uraian berikut.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx &= \int \left(\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)} \right) dx \\
 &= \int \left(\frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)} \right) dx \\
 &= \int \left(\frac{(A+B)x+(-3A+B)}{(x+1)(x-3)} \right) dx
 \end{aligned}$$

Dengan **sifat kesamaan fungsi** diperoleh $A + B = 5$, $3A + B = -3$, maka didapat $A = 2$ dan $B = 3$, sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx &= \int \left(\frac{2}{(x+1)} + \frac{3}{(x-3)} \right) dx \\
 &= \int \frac{2}{(x+1)} dx + \int \frac{3}{(x-3)} dx \\
 &= 2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-3| + c
 \end{aligned}$$

3. $\int \frac{x+1}{x-1} dx$

Integrasi fungsi rasional tidak sejati, maka harus diubah menjadi fungsi rasional sejati seperti uraian berikut.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+1}{x-1} dx &= \int \frac{x-1+2}{x-1} dx \\
 &= \int \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} \right) dx \\
 &= \int \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) dx \\
 &= \int 1 dx + \int \frac{2}{x-1} dx \\
 &= x + 2 \ln|x-1| + c
 \end{aligned}$$

4. $\int \frac{5x-3}{x^3-2x^2-3x} dx$

Seperti no.1 dan 2, langkah pertama untuk menyelesaikan soal ini adalah dengan memfaktorkan penyebutnya seperti uraian berikut.

$$\int \frac{5x-3}{x^3-2x^2-3x} dx = \int \frac{5x-3}{x(x+1)(x-3)} dx$$

Agar bisa diintegrasikan, maka bentuk $\int \frac{5x-3}{x(x+1)(x-3)} dx$ harus diubah menjadi bentuk berikut.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-3}{x(x+1)(x-3)} dx &= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-3)} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-3)} \right) dx \end{aligned}$$

Dengan **aturan kesamaan fungsi** diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$5x - 3 = A(x+1)(x-3) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$5x - 3 = Bx(x-3) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$5x - 3 = Cx(x+1) \quad \dots\dots\dots (3)$$

Dari faktor $x(x+1)(x-3) = 0$ diperoleh akar-akar persamaan $x = 0$, $x = -1$, dan $x = 3$. Selanjutnya akar-akar tersebut disubstitusikan ke persamaan (1), (2), dan (3) diperoleh $A = -1$, $B = -\frac{1}{2}$, dan $C = \frac{3}{2}$. Sehingga:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-3}{x^3-2x^2-3x} dx &= \int \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x-3)} \right) dx \\ &= \int \left(-\frac{1}{x} \right) dx - \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)} \right) dx + \int \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x-3)} \right) dx \\ &= -\int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+1)} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x-3)} dx \\ &= -\ln x - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-3| + c \end{aligned}$$

C. Latihan Soal

Tentukan hasil dari integral fungsi rasional berikut.

1. $\int \frac{1}{x(x+1)} dx$

2. $\int \frac{2}{x^2+3x} dx$

3. $\int \frac{3}{x^2-1} dx$

4. $\int \frac{5x}{2x^3+6x^2} dx$

5. $\int \frac{x-11}{x^2+3x-4} dx$

$$6. \int \frac{x-7}{x^2-x-12} dx$$

$$7. \int \frac{3x-13}{x^2+3x-10} dx$$

$$8. \int \frac{x}{x^3-2x-6x} dx$$

$$9. \int \frac{x^2+8}{x^2-5x+6} dx$$

$$10. \int \frac{x^3}{x^2+x-2} dx$$

D. Daftar Pustaka

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). Calculus 10th Edition. New York: Laurie Rosatone.

E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). Calculus (Ninth Edition). Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.

Hass, J., Weir, M. D., George B. Thomas, J., & Hell, C. (2016). University Calculus Early Transcendental. New York: Pearson Education, Inc.

PERTEMUAN KE 12

INTEGRAL PARSIAL TAK TENTU

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan pengintegralan parsial tak tentu.

B. Uraian Materi

Integral parsial merupakan suatu teknik pengintegralan yang digunakan jika persoalan integral tidak bisa diselesaikan menggunakan aturan dasar dan aturan substitusi (Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016). Integral parsial juga sering disebut metode substitusi ganda. Di dalam integral parsial, umumnya persamaanya terdiri dari 2 fungsi yang berbeda jenis, sehingga harus dimisalkan sebagai u dan dv . Untuk menghitungnya harus menentukan du (turunan fungsi u) dan v (integral dv). Dalam menentukan integral parsial suatu fungsi umumnya menggunakan rumus berikut.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

(E.Vaberg, Purcell, & Rigdon, 2007)

Terdapat 2 metode atau cara untuk menyelesaikan persoalan integral dengan aturan integral parsial yang diuraikan sebagai berikut.

1. Cara 1

- Mengubah soal dengan memisalkan soal integral $\int f(x)dx$ menjadi bentuk $\int u dv$
- Tentukan nilai du sebagai turunan dari u dan tentukan nilai v sebagai integral dari v
- Masukkan hasil langkah 1 dan 2 ke dalam rumus baku integral parsial

2. Cara 2

Cara ini merupakan cara praktis untuk menentukan integral parsial selain fungsi $\ln$, dimana langkah-langkahnya adalah:

- Ubah fungsi integran menjadi bentuk $\int u dv$, sehingga diperoleh fungsi u dan dv

2. Tentukan turunan dari fungsi u hingga bernilai 0 dan integralkan dari fungsi dv sampai u bernilai 0 dengan menggunakan aturan tabel turunan dan integral seperti Tabel 12.1. berikut.

Tabel 12.1 Integral Parsial

Turunan u	Integral dv
u	dv
du	$\int dv$
$d(du)$	$\int \int dv$
..... (turunkan sampai u bernilai 0)	 (integral dihentikan saat u bernilai 0)

3. Hasil integral diperoleh dengan menjumlahkan perkalian u dengan integral pertama dv , kemudian mengurangkan perkalian du dengan integral kedua dv . (jika $u=0$ didapat dari lebih dari 2 kali turunan, maka pada perkalian fungsinya gunakan pola penjumlahan, pengurangan, penjumlahan, pengurangan, dan seterusnya)

(Ratnadewi; dkk, 2016)

Contoh:

Tentukan penyelesaian integral fungsi berikut menggunakan aturan integral parsial dengan cara 1 dan 2.

1. $\int x \cos x \, dx$
2. $\int x \sin x \, dx$
3. $\int 4x \cos x \, dx$
4. $\int 5x \sin x \, dx$
5. $\int x \cos 2x \, dx$
6. $\int x e^x \, dx$
7. $\int x e^{5x} \, dx$
8. $\int \ln x \, dx$
9. $\int x^2 \sin x \, dx$
10. $\int x^2 \cos x \, dx$

Penyelesaian:**1. Cara 1**

$$\int x \cos x \, dx$$

Misal :

$$u = x$$

$$dv = \cos x \, dx$$

Maka:

$$du = dx$$

$$v = \int \cos x \, dx$$

$$= \sin x$$

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x - (-\cos x) + c \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

Cara 2

Keterangan:

Fungsi u dan dv tidak perlu dicari karena sudah ada pada pembahasan cara 1, tetapi untuk soal latihan/tugas, tentukan fungsi u dan dv seperti cara 1.

(berlaku untuk semua contoh soal 1-10)

Turunan u	Integral dv
x	cos x
1	sin x
0	-cos x

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= x \sin x - 1(-\cos x) + c \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

2. Cara 1

$$\int x \sin x \, dx$$

Misal:

$$u = x$$

$$dv = \sin x \, dx$$

Maka:

$$du = dx$$

$$v = \int \sin x \, dx$$

$$= -\cos x$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

Cara 2

Turunan u	Integral dv
x	sin x
1	-cos x
0	-sin x

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= x(-\cos x) - 1(-\sin x) + c \\ &= -x \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

3. Cara 1

$$\int 4x \cos x \, dx$$

Misal:

$$u = 4x$$

$$dv = \cos x \, dx$$

Maka:

$$du = 4 \, dx$$

$$v = \int \cos x \, dx$$

$$= \sin x$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int 4x \cos x \, dx &= 4x \sin x - \int \sin x (4 \, dx) \\ &= 4x \sin x - (-4 \cos x) + c \\ &= 4x \sin x + 4 \cos x + c \end{aligned}$$

Cara 2

Turunan u	Integral dv
4x	cos x
4	sin x
0	-cos x

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int 4x \cos x \, dx &= 4x \sin x - 4(-\cos x) + c \\ &= 4x \sin x + 4 \cos x + c\end{aligned}$$

4. Cara 1

$$\int 5x \sin x \, dx$$

Misal:

$$u = 5x$$

$$dv = \sin x \, dx$$

Maka:

$$du = 5 \, dx$$

$$\begin{aligned}v &= \int \sin x \\ &= -\cos x\end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int 5x \sin x \, dx &= 5x(-\cos x) - \int (-\cos x)5 \, dx \\ &= -5x \cos x + \int 5 \cos x \, dx \\ &= -5x \cos x + 5 \sin x + c\end{aligned}$$

Cara 2

Turunan u	Integral dv
5x	sin x
5	-cos x
0	-sin x

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int 5x \sin x \, dx &= 5x(-\cos x) - 5(-\sin x) \, dx + c \\ &= -5x \cos x + 5 \sin x + c\end{aligned}$$

5. Cara 1

$$\int x \cos 2x \, dx$$

Misal:

$$u = x$$

$$dv = \cos 2x \, dx$$

Maka:

$$du = dx$$

$$v = \int \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\begin{aligned} \int x \cos 2x \, dx &= x\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) - \int \frac{1}{2} \sin 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) + c \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c \end{aligned}$$

Cara 2

Turunan u	Integral dv
x	cos 2x
1	$\frac{1}{2} \sin 2x$
0	$-\frac{1}{4} \cos 2x$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int x \cos 2x \, dx &= x\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) - 1\left(-\frac{1}{4} \cos 2x\right) + c \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c \end{aligned}$$

6. Cara 1

$$\int x e^x \, dx$$

Misal:

$$u = x$$

$$dv = e^x \, dx$$

Maka:

$$du = dx$$

$$v = \int e^x \, dx$$

$$= e^x$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int x e^x \, dx &= x e^x - \int e^x \, dx \\ &= x e^x - e^x + c \\ &= e^x (x - 1) + c \end{aligned}$$

Cara 2

Turunan u	Integral dv
x	e^x
1	e^x
0	e^x

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int x e^x dx &= x e^x - 1 \cdot e^x + c \\
 &= x e^x - e^x + c \\
 &= e^x (x - 1) + c
 \end{aligned}$$

7. $\int x e^{5x} dx$

Misal:

$$u = x$$

$$dv = e^{5x} dx$$

Maka:

$$du = dx$$

$$v = \int e^{5x} dx$$

$$= \frac{1}{5} e^{5x}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int x e^{5x} dx &= x \left(\frac{1}{5} e^{5x} \right) - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx \\
 &= \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{5} \int e^{5x} dx \\
 &= \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} e^{5x} \right) + c \\
 &= \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} + c
 \end{aligned}$$

Cara 2

Turunan u	Integral dv
x	e^{5x}
1	$\frac{1}{5} e^{5x}$
0	$\frac{1}{25} e^{5x}$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int x e^{5x} dx &= x \left(\frac{1}{5} e^{5x} \right) - 1 \left(\frac{1}{25} e^{5x} \right) + c \\
 &= \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} + c
 \end{aligned}$$

8. $\int \ln x \, dx$

Misal:

$$u = \ln x$$

$$dv = dx$$

Maka:

$$du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$v = \int dx$$

$$= x$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \ln x (x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - \int 1 \, dx \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

Cara 2

(tidak bisa diselesaikan dengan cara 2 karena memuat fungsi ln)

9. $\int x^2 \sin x \, dx$

Contoh soal ini merupakan contoh soal integral parsial berulang (kerap kali kita gunakan pengintegralan parsial beberapa kali)

Misal:

$$u = x^2$$

$$dv = \sin x \, dx$$

Maka:

$$du = 2x \, dx$$

$$v = \int \sin x \, dx$$

$$= -\cos x$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \, dx &= x^2(-\cos x) - \int (-\cos x)(2x \, dx) \\ &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx \quad (\text{integral parsial lagi}) \\ &= -x^2 \cos x + \{2x \sin x - \int \sin x (2 \, dx)\} \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c\end{aligned}$$

Cara 2

Turunan u	Integral dv
x^2	$\sin x$
$2x$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \, dx &= x^2(-\cos x) - 2x(-\sin x) + 2(\cos x) + c \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c\end{aligned}$$

10. $\int x^2 \cos x \, dx$

(Integral parsial berulang)

Misal:

$$u = x^2$$

$$dv = \cos x \, dx$$

Maka:

$$du = 2x \, dx$$

$$v = \int \cos x \, dx$$

$$= \sin x$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \, dx &= x^2(\sin x) - \int (\sin x)(2x \, dx) \\ &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx \text{ (integral parsial lagi)} \\ &= x^2 \sin x - \{2x(-\cos x) - \int (-\cos x)2 \, dx\} \\ &= x^2 \sin x - \{-2x \cos x + \int 2 \cos x \, dx\} \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - \int 2 \cos x \, dx \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c\end{aligned}$$

Cara 2

Turunan u	Integral dv
x^2	$\cos x$
$2x$	$\sin x$
2	$-\cos x$
0	$-\sin x$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \, dx &= x^2(\sin x) - 2x(-\cos x) + 2(-\sin x) + c \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c\end{aligned}$$

C. Latihan Soal

Tentukan penyelesaian integral tak tentu berikut menggunakan aturan integral parsial (boleh cara 1 atau 2).

1. $\int 7x \cos x \, dx$
2. $\int 8x \sin x \, dx$
3. $\int x \cos 8x \, dx$
4. $\int x \sin 7x \, dx$
5. $\int 5xe^{9x} \, dx$
6. $\int \ln 4x \, dx$
7. $\int x^2 \sin 3x \, dx$
8. $\int x^2 \cos 6x \, dx$
9. $\int x^2 e^x \, dx$
10. $\int x^2 e^{3x} \, dx$

D. Daftar Pustaka

- E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). Calculus (Ninth Edition). Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.
- Hass, J., Weir, M. D., George B. Thomas, J., & Hell, C. (2016). University Calculus Early Transcendental. New York: Pearson Education, Inc.
- Ratnadewi; dkk. (2016). Matematika Teknk untuk Perguruan Tinggi. Bandung: Rekayasa Sains.

PERTEMUAN KE 13

INTEGRAL PARSIAL TENTU

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan pengintegralan parsial tentu.

B. Uraian Materi

Pengintegralan parsial tentu merupakan kombinasi antara aturan integral tentu dengan aturan integral parsial, dengan ketentuan bahwa di dalam suatu fungsi tersebut bisa diasumsikan bahwa $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya kontinyu pada interval tertutup $[a,b]$ (Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016). Langkah pengerjaanya tetap sama menggunakan langkah integral parsial tak tentu yaitu dengan cara menentukan fungsi u dan dv , kemudian substitusikan ke rumus integral parsial tentu. Bentuk integral baku dari integral parsial tentu seperti rumus berikut.

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

(E.Vaberg, Purcell, & Rigdon, 2007)

Integral parsial tentu dikatakan kombinasi dari aturan integral tentu dan integral parsial karena dalam pensubstitusian interval, sebuah interval dapat diterjemahkan ke dalam bentuk yang berbeda. Untuk mengetahui perbedaan tersebut, perhatikan 2 contoh berikut.

1. Tentukan penyelesaian dari $\int_0^\pi x \, dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi \\ &= \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{2} \\ &= \frac{3,14^2}{2} \\ &= 4,93 \end{aligned}$$

2. Tentukan penyelesaian dari $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin x \, dx &= [-\cos x]_0^{\pi} \\ &= (-\cos \pi - (-\cos 0)) \\ &= \cos 180^\circ \\ &= -1\end{aligned}$$

Dari kedua contoh tersebut dapat dilihat bahwa meskipun interval dari keduanya sama-sama $[0, \pi]$, namun π pada soal no.1 (fungsi aljabar) bernilai 3,14, sedangkan π pada soal no.2 (fungsi trigonometri) bernilai 180° . Dalam aplikasi persoalan integral parsial tentu, umumnya setiap soal terdiri dari gabungan fungsi tersebut, sehingga harus dapat membedakan kapan menggunakan $\pi = 3,14$ dan kapan menggunakan $\pi = 180^\circ$.

Seperti pada integral parsial tak tentu, pada integral parsial tentu juga terdapat 2 metode atau cara untuk menyelesaikan persoalan integral dengan aturan integral parsial yang diuraikan sebagai berikut.

1. Cara 1

- Mengubah soal dengan memisalkan soal integral $\int f(x)dx$ menjadi bentuk $\int u \, dv$
- Tentukan nilai u sebagai turunan dari u dan tentukan nilai v sebagai integral dari v
- Masukkan hasil langkah 1 dan 2 ke dalam rumus baku integral parsial
- Masukkan batas interval yang diketahui pada hasil integral dari poin c dengan menggunakan aturan integral tentu:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016)

2. Cara 2

Cara ini merupakan cara praktis untuk menentukan integral parsial selain fungsi $\ln$, dimana langkah-langkahnya adalah:

- Ubah fungsi integran menjadi bentuk $\int u \, dv$, sehingga diperoleh fungsi u dan dv

- b. Tentukan turunan dari fungsi u hingga bernilai 0 dan integralkan dari fungsi dv sampai u bernilai 0 dengan menggunakan aturan tabel turunan dan integral seperti Tabel 12.1. berikut.

Tabel 12.1. Tabel Turunan dan Integral

Turunan u	Integral dv
u	dv
du	$\int dv$
$d(du)$	$\iint dv$
..... (turunkan sampai u bernilai 0)	 (integral dihentikan saat u bernilai 0)

- c. Integralkan fungsi integran yang diketahui dengan menjumlahkan perkalian u dengan integral pertama dv , kemudian kurangkan perkalian du dengan integral kedua dv (jika $u=0$ didapat dari lebih dari 2 kali turunan, maka pada perkalian fungsinya gunakan pola penjumlahan, pengurangan, penjumlahan, pengurangan, dan seterusnya), kemudian masukkan batas interval yang diketahui pada hasil integral dari poin b dengan menggunakan aturan integral tentu:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(Ratnadewi; dkk, 2016)

Contoh:

Selesaikan integral tentu berikut menggunakan 2 cara.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x \, dx$
3. $\int_0^{\pi} 6x \cos x \, dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x \, dx$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x \, dx$
6. $\int_1^3 \ln x \, dx$

$$7. \int_1^2 x \ln x \, dx$$

Penyelesaian:

1. Cara 1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$$

Kita tentukan fungsi u , dv , du , dan v seperti pada penyelesaian bentuk integral parsial tak tentu seperti uraian berikut.

Misal:

$$u = x$$

$$dv = \cos x \, dx$$

Maka:

$$du = dx$$

$$v = \int \cos x \, dx$$

$$= \sin x$$

Kemudian kita substitusikan ke rumus integral parsial tentu

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx &= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \\ &= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) - (0 \cdot \sin 0) \right] - \left[\left(-\cos \frac{\pi}{2} \right) - (-\cos 0) \right] \\ &= \left[\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 \right) - (0) \right] - [(0) - (-1)] \\ &= \left[\left(\frac{\pi}{2} \right) - (0) \right] - [(1)] \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

Cara 2

Keterangan:

Fungsi u dan dv tidak perlu dicari karena sudah ada pada pembahasan cara 1, tetapi untuk soal latihan/tugas, tentukan fungsi u dan dv seperti cara 1. (berlaku untuk semua contoh soal 1-7)

Turunan u	Integral dv
x	cos x
1	sin x
0	-cos x

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx &= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 1[(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left[\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) - (0 \cdot \sin 0) \right] - \left[(-\cos \frac{\pi}{2}) - (-\cos 0) \right] \\
 &= \left[\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 \right) - (0) \right] - [(0) - (-1)] \\
 &= \left[\left(\frac{\pi}{2} \right) - (0) \right] - [(1)] \\
 &= \frac{\pi}{2} - 1
 \end{aligned}$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x \, dx$

Misal:

$$u = 2x$$

$$dv = \sin x \, dx$$

Maka:

$$du = 2 \, dx$$

$$v = \int \sin x \, dx$$

$$= -\cos x$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x \, dx &= [2x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) 2 \, dx \\
 &= [-2x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [(-2 \sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left[\left(-2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{\pi}{2} \right) - 2(0) \cos 0 \right] - \left[(-2 \sin \frac{\pi}{2}) - (-2 \sin 0) \right] \\
 &= [(0) - (0)] - [(-2(1)) - (0)] \\
 &= [0] - [(-2)] \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Cara 2

Turunan u	Integral dv
2x	sin x
2	-cos x
0	-sin x

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x \, dx &= [2x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2[(-\sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= [-2x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left[\left(-2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{\pi}{2} \right) + 2(0) \cos 0 \right] - \left[\left(-2 \sin \frac{\pi}{2} \right) + (2 \sin 0) \right] \\
 &= [(0) + (0)] - [(-2(1)) + (0)] \\
 &= [0] - [(-2)] \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

3. $\int_0^{\pi} 6x \cos x \, dx$

Misal:

$$u = 6x$$

$$dv = \cos x \, dx$$

Maka:

$$du = 6 \, dx$$

$$v = \int \cos x \, dx$$

$$= \sin x$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} 6x \cos x \, dx &= [6x(\sin x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (\sin x) 6 \, dx \\
 &= [6x \sin x]_0^{\pi} - [(-6 \cos x)]_0^{\pi} \\
 &= [(6(\pi) \sin \pi) - 6(0) \sin(0)] - [(-6 \cos \pi) - (-6 \cos 0)] \\
 &= [(0) - (0)] - [(-6(-1)) - (-6)] \\
 &= [0] - [(6) + (6)] \\
 &= -12
 \end{aligned}$$

Cara 2

Turunan u	Integral dv
6x	cos x
6	sin x
0	-cos x

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} 6x \cos x \, dx &= [6x(\sin x)]_0^{\pi} - 6[(-\cos x)]_0^{\pi} \\
 &= [6x \sin x]_0^{\pi} + [(6 \cos x)]_0^{\pi} \\
 &= [(6(\pi) \sin \pi) - 6(0) \sin(0)] + [(6 \cos \pi) - (6 \cos 0)] \\
 &= [(0) - (0)] + [(6(-1)) - (6)] \\
 &= [0] + [-6 - 6] \\
 &= -12
 \end{aligned}$$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x \, dx$

Misal:

$$u = x$$

$$dv = \cos 2x \, dx$$

Maka:

$$du = dx$$

$$v = \int \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x \, dx &= [x(\frac{1}{2} \sin 2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx \\
 &= [\frac{1}{2} x \cdot \sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [(\frac{1}{2}(-\frac{1}{2} \cos 2x))]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= [\frac{1}{2} x \cdot \sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [(-\frac{1}{4} \cos 2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= [(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}) \sin 2(\frac{\pi}{4})) - (\frac{1}{2}(0) \sin 2(0))] - [(-\frac{1}{4} \cos 2(\frac{\pi}{4})) - (-\frac{1}{4} \cos 2(0))] \\
 &= [(\frac{\pi}{8}(1)) - (0)] - [(0) - (-\frac{1}{4})] \\
 &= [(\frac{\pi}{8}) - (0)] - [(\frac{1}{4})] \\
 &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$= 0,143$$

Cara 2

Turunan u	Integral dv
x	cos 2x
1	$\frac{1}{2} \sin 2x$
0	$-\frac{1}{4} \cos 2x$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x \, dx &= \left[x \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[1 \left(-\frac{1}{4} \cos 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0 \sin 2 \cdot 0 \right) + \left(\frac{1}{4} \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \cos 2 \cdot 0 \right) \\
 &= \left(\frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \right) + \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cos 0 \right) \\
 &= \left(\frac{\pi}{8} \cdot 1 \right) + \left(\frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 1 \right) \\
 &= 0,143
 \end{aligned}$$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x \, dx$

Misal:

$$u = x$$

$$dv = \sin 2x \, dx$$

Maka:

$$du = dx$$

$$v = \int \sin 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x \, dx &= \left[x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{2} \cos 2x \, dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2} x \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \left[-\frac{1}{2} x \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\left(-\frac{1}{4} \sin 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right) \cos 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) - \left(-\frac{1}{2} (0) \cos 2(0) \right) \right] - \left[\left(-\frac{1}{4} \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) - \left(-\frac{1}{4} \sin 2(0) \right) \right] \\
&= \left[\left(-\frac{\pi}{8} (0) \right) - (0) \right] - \left[\left(-\frac{1}{4} \right) - (0) \right] \\
&= [(0) - (0)] - \left[\left(-\frac{1}{4} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Cara 2

Turunan u	Integral dv
x	sin 2x
1	$-\frac{1}{2} \cos 2x$
0	$-\frac{1}{4} \sin 2x$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x \, dx &= \left[x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[1 \left(-\frac{1}{4} \sin 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left[\frac{1}{2} x \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0 \cos 2 \cdot 0 \right) + \left(\frac{1}{4} \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin 2 \cdot 0 \right) \\
&= \left(\frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{2} - 0 \right) + \left(\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin 0 \right) \\
&= 0 + \left(\frac{1}{4} \cdot 1 - 0 \right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

6. $\int_1^3 \ln x \, dx$

Misal:

$$u = \ln x$$

$$dv = dx$$

Maka:

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = \int dx$$

$$= x$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 \ln x \, dx &= [\ln x (x)]_1^3 - \int_1^3 x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= [x \ln x]_1^3 - \int_1^3 1 dx \\
 &= [x \ln x]_1^3 - [x]_1^3 \\
 &= [3 \ln 3 - 1 \ln 1] - [3 - 1] \\
 &= [3 \ln 3 - 0] - [3 - 1] \\
 &= 3 \ln 3 - 2
 \end{aligned}$$

Cara 2

(tidak bisa diselesaikan dengan cara 2 karena memuat fungsi $\ln$)

$$7. \int_1^2 x \ln x \, dx$$

Misal:

$$u = \ln x$$

$$dv = x dx$$

Maka:

$$du = \frac{1}{x}$$

$$v = \int x dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \ln x \, dx &= [\ln x (\frac{1}{2} x^2)]_1^3 - \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} dx \\
 &= [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x dx \\
 &= [x \ln x]_1^2 - [\frac{1}{2} (\frac{1}{2} x^2)]_1^2 \\
 &= [x \ln x]_1^2 - [\frac{1}{4} x^2]_1^2 \\
 &= [2 \ln 2 - 1 \ln 1] - [\frac{1}{4} (2^2) - \frac{1}{4} (1^2)] \\
 &= [2 \ln 2 - 0] - [1 - \frac{1}{4}] \\
 &= 2 \ln 2 - \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Cara 2

(tidak bisa diselesaikan dengan cara 2 karena memuat fungsi $\ln$)

C. Latihan Soal

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$
2. $\int_0^{\pi} 2x \sin x \, dx$
3. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 12x \cos x \, dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x \cos 6x \, dx$
5. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin 4x \, dx$
6. $\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 8x \, dx$
8. $\int_2^6 4x \ln x \, dx$
9. $\int_1^4 \ln 3x \, dx$
10. $\int_0^{\pi} x^2 e^{2x} \, dx$

D. Daftar Pustaka

E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). Calculus (Ninth Edition). Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.

Hass, J., Weir, M. D., George B. Thomas, J., & Hell, C. (2016). University Calculus Early Transcendental. New York: Pearson Education, Inc.

Ratnadewi; dkk. (2016). Matematika Teknk untuk Perguruan Tinggi. Bandung: Rekayasa Sains.

PERTEMUAN KE 14

LUAS DAERAH YANG DIBATASI SUMBU X DAN Y

A. Tujuan Pembelajaran

Adapun tujuan pembelajaran yang akan dicapai pada pertemuan ini adalah:

1. Mahasiswa mampu menggambar grafik dari persamaan linier dan kuadrat;
2. Mahasiswa mampu menyelesaikan dan menghitung luas daerah yang dibatasi garis dan kurva menggunakan integral tentu.

B. Uraian Materi

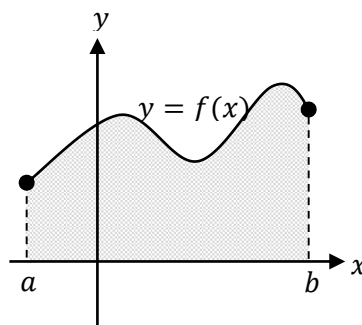
1. Menentukan Luas Daerah di Atas Sumbu x

Berdasarkan **Aturan Riemann**, luas suatu daerah didefinisikan sebagai jumlah nilai limit yang dibatasi oleh interval tertutup $[a,b]$ yang dapat dinyatakan dengan integral tentu. Penentuan luas daerah seperti Gambar 5.1, yang dibatasi pada bagian bawah oleh garis pada sumbu x, pada bagian atas oleh kurva $y = f(x)$, dan berada antara $x = a$ dan $x = b$, maka luas daerah tersebut adalah

$$\int_a^b f(x) dx$$

(Purcell & Vaberg, 2015)

Jika digambarkan dengan sketsa maka daerah yang dibatasi oleh sebarang fungsi $y = f(x)$, garis $x = a$, $x = b$, dan sumbu x adalah seperti pada Gambar 14.1 berikut.



Gambar 14.10 Sketsa Luas yang dibatasi oleh sumbu x dan $y = f(x)$

(Thomas, weir, & Hass, 2017)

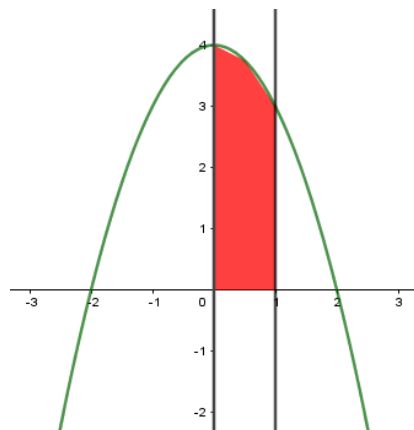
Contoh 1:

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = 4 - x^2$, Sumbu x, garis $x = 0$, dan $x = 1$

Penyelesaian:

Langka pertama yang harus dibuat adalah membuat sketsa dari daerah tersebut seperti Gambar 14.2.

(pelajari materi membuat grafik di kalkulus 1)



Gambar 14.11 Sketsa Daerah yang Dibatasi oleh kurva $f(x)=4-x^2$, Sumbu x, garis $x = 0$, dan $x = 1$

Misal daerah yang dicari luasnya adalah R , maka luas daerah tersebut diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 L(R) &= \int_0^1 (4 - x^2) dx \\
 &= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\
 &= \left(4 - \frac{1}{3} \right) - (0) \\
 &= 3\frac{2}{3} \text{ satuan luas}
 \end{aligned}$$

2. Menentukan Luas Daerah di Bawah Sumbu x

Jika suatu daerah terletak di bawah sumbu x seperti Gambar 14.3, maka untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x, garis $x = a$, dan garis $x = b$ dengan kurva $y = f(x)$ adalah

$$\int_a^b -f(x) dx$$

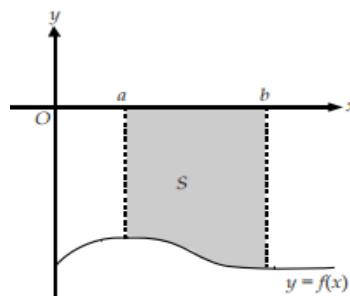
(Purcell & Vaberg, 2015)

Apabila luas daerah berada di bawah sumbu x , maka integral tertentu bernilai negatif. Namun karena luas daerah tidak mungkin bernilai bilangan negatif maka nilai integral tersebut diberi harga mutlak. Sehingga luas daerah yang bernilai negatif tersebut dinyatakan dalam bentuk

$$\int_a^b -f(x) dx = \left| \int_a^b -f(x) dx \right|$$

(Edwards & H., 2010)

Jika digambarkan dengan sketsa maka daerah yang dibatasi oleh sebarang fungsi $y = f(x)$, garis $x = a$, $x = b$, dan sumbu x adalah seperti pada Gambar 14.3 berikut.

Gambar 14.12 Sketsa Luas Daerah yang Dibatasi oleh Sumbu x dan $y = f(x)$

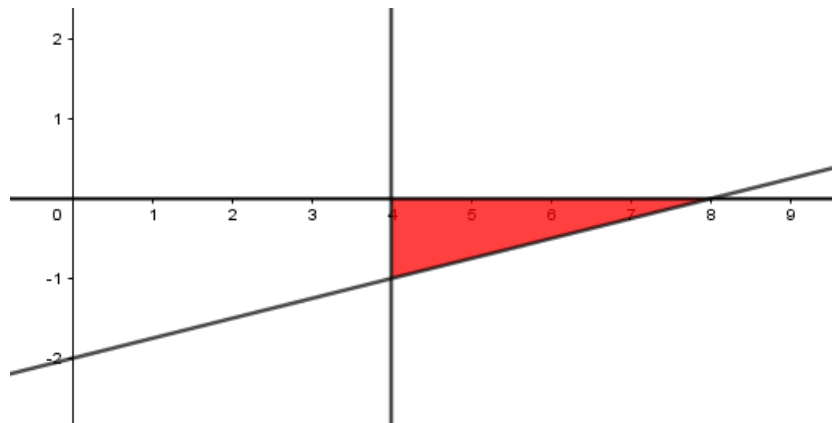
(Thomas, weir, & Hass, 2017)

Contoh 2:

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = \frac{1}{4}x - 2$, sumbu x , garis $x = 4$, dan Sumbu y .

Penyelesaian:

Seperti pada contoh 1, langkah pertama yang harus dilakukan adalah membuat sketsa grafik daerah yang dibatasi oleh garis $y = \frac{1}{4}x - 2$, sumbu x, garis $x = 4$, dan Sumbu y sebagai berikut.



Gambar 14.13 Sketsa Daerah yang Dibatasi oleh garis $y = \frac{1}{4}x - 2$, sumbu x, garis $x = 4$, dan Sumbu y

Misalkan luas daerah yang dicari adalah S, maka luas daerah tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
 L(S) &= -\int_0^4 \left(\frac{1}{4}x - 2 \right) dx \\
 &= -\left[\frac{1}{8}x^2 - 2x \right]_0^4 \\
 &= -((2 - 8) - (0)) \\
 &= 6 \text{ satuan luas}
 \end{aligned}$$

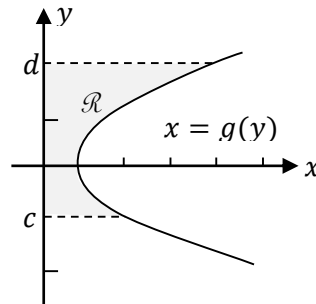
3. Menentukan Luas Daerah Sumbu y

Pada bab ini, selain membahas luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x, juga dibahas cara untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh sumbu y. Misalkan diketahui suatu daerah R yang disketsakan oleh Gambar 14.4, dibatasi oleh sumbu y, kurva $x = g(y)$, serta garis $y = c$ dan $y = d$. Maka luas daerah R dapat ditentukan dengan menggunakan rumus integral tentu sebagai berikut.

$$\int_c^d g(y) dy$$

(Purcell & Vaberg, 2015)

Jika digambarkan dengan sketsa maka daerah yang dibatasi oleh sebarang fungsi $y = f(x)$, garis $x = c$, $x = d$, dan sumbu x adalah seperti pada Gambar 14.5 berikut.



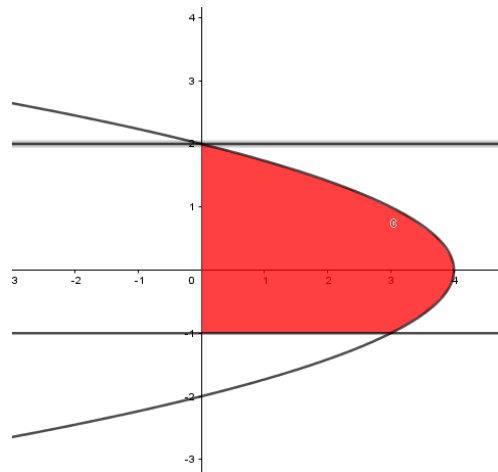
Gambar 14.14 Sketsa Grafik yang Dibatasi oleh Sumbu y , Kurva $x=g(y)$, Serta Garis $y=c$ dan $y=d$

Contoh 3:

Tentukan luas daerah yang dibatas oleh parabola $x = 4 - y^2$, sumbu y , $y = 2$ dan $y = -1$

Penyelesaian:

Pertama, harus dibuat sketsa daerah yang dibatas oleh parabola $x = 4 - y^2$, sumbu y , $y = 2$ dan $y = -1$.



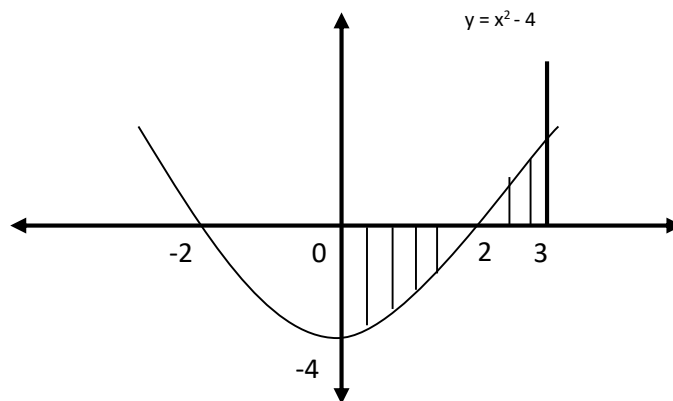
Gambar 14.15 Sketsa daerah yang dibatasi oleh yang dibatas oleh parabola $x=4-y^2$, sumbu y , $y=2$ dan $y=-1$

Misalkan luas daerah yang dicari adalah S , maka luas daerah S adalah

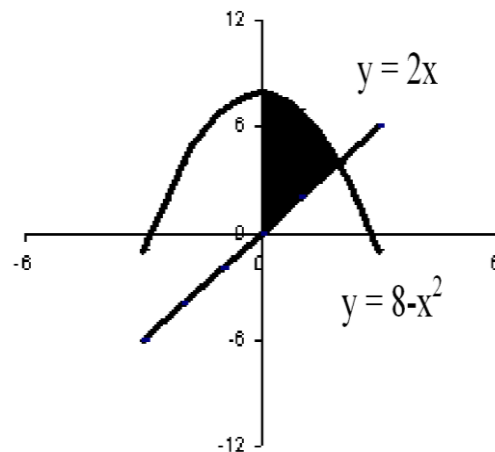
$$\begin{aligned}
 L(S) &= \int_{-1}^2 (4 - y^2) dy \\
 &= \left(4y - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{-1}^2 \\
 &= \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-4 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) \\
 &= 12 - \frac{9}{3} \\
 &= 12 - 3 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

C. Latihan Soal

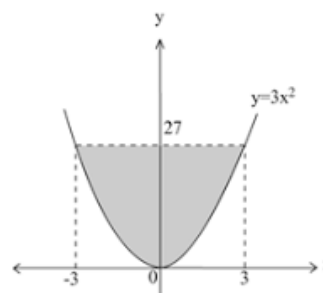
1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh parabola $x = 8 + 2y - y^2$, sumbu y , dan garis $y = -1$ dan $y = 3$
2. Hitunglah luas daerah dari gambar berikut.



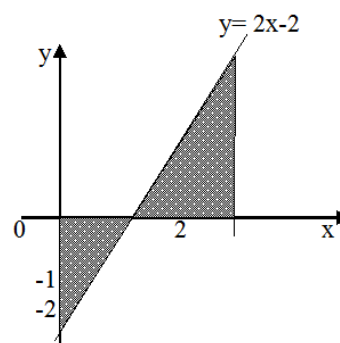
3. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh Kurva $y = -x^2 + 6x - 5$ dan Sumbu x
4. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $x + y = 6$
5. Tentukan luas daerah arsiran pada gambar di bawah ini.



6. Tentukan luas bidang yang diarsir.



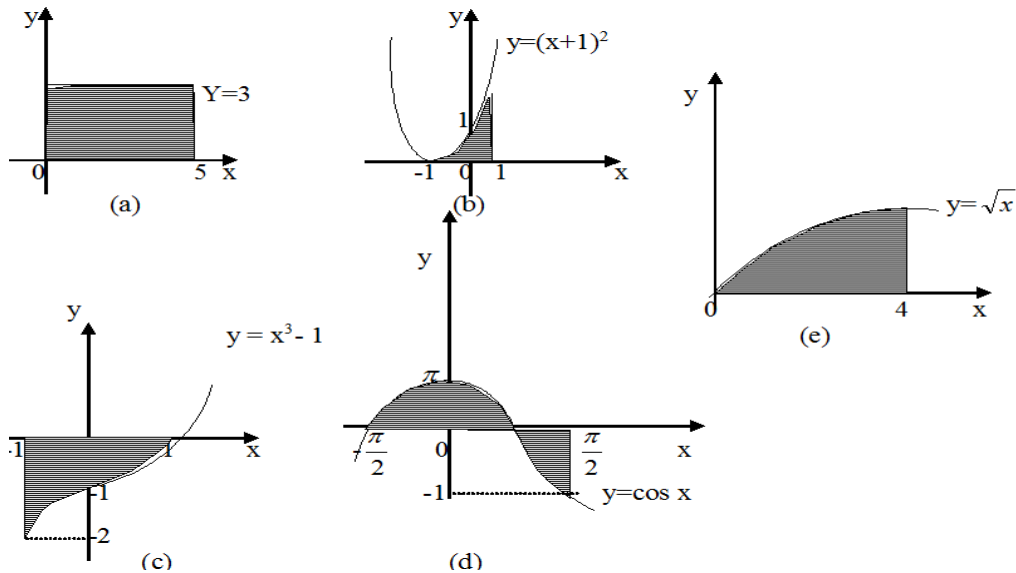
7. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh $y = 2x - 2$, untuk $0 \leq x \leq 2$



8. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh garis dan kurva yang terdapat pada tiap soal berikut :

- $y = 3x + 4$, sumbu x , dan garis $x = 2$ dan $x = 6$.
- $y = 3x + 4$, dan sumbu x
- $x = 8 - 2y - y^2$, sumbu y , dan garis $y = -1$ dan $y = 3$

9. Tentukan luas persegi panjang terbesar yang dapat dibuat dalam daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis $y = 4$.
10. Dengan menggunakan pengintegralan, hitunglah luas daerah yang diarsir pada gambar berikut ini.



D. Daftar Pustaka

Edwards, R. L., & H., B. (2010). Calculus (Ninth Edition). New York: Richard Stratton.

Purcell, E. J., & Vaberg, D. (2015). Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid Satu). Jakarta: Erlangga.

Thomas, G. B., weir, M. D., & Hass, J. (2017). Kalkulus Thomas (Edisi Ketiga Belas Jilid 1). Jakarta: Erlangga.

PERTEMUAN KE 15**LUAS DAERAH YANG DIBATASI GARIS-KURVA DAN DUA KURVA****A. Tujuan Pembelajaran**

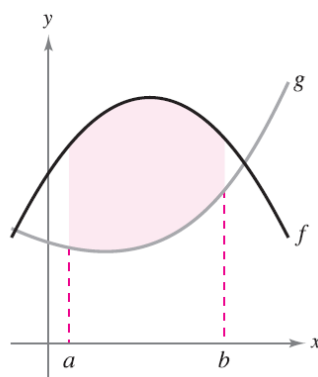
Adapun tujuan pembelajaran yang akan dicapai pada pertemuan ini adalah:

1. Mahasiswa mampu menentukan luas daerah yang dibatasi oleh garis dan kurva;
2. Mahasiswa mampu menentukan luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva.

B. Uraian Materi**1. Daerah yang Dibatasi Oleh Garis-Kurva dan Dua Kurva**

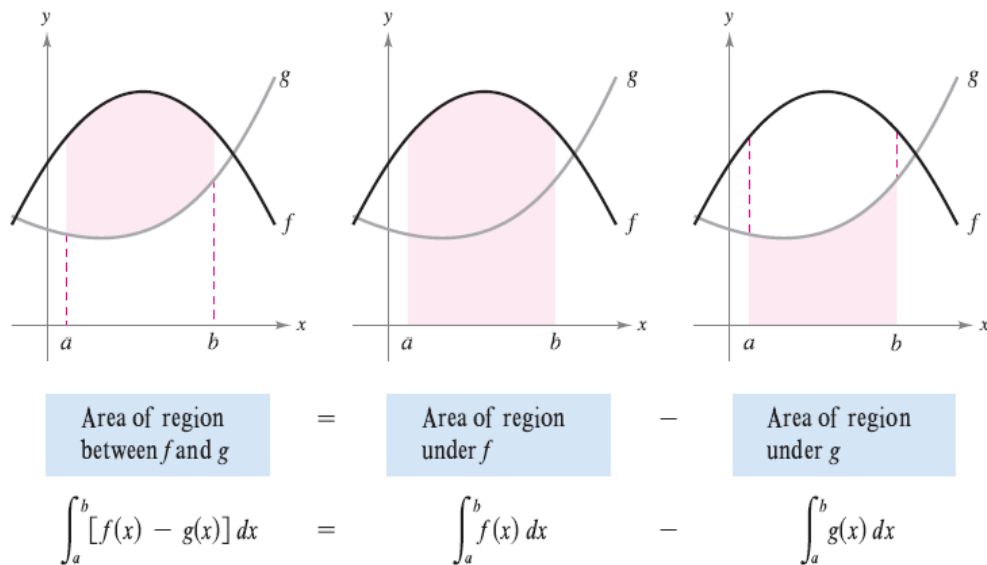
Untuk menentukan daerah yang dibatasi oleh garis dan kurva atau dua kurva harus terlebih dahulu mampu membuat sketsanya. Misalkan daerah yang dibatasi oleh garis dan kurva atau dua kurva tersebut dimisalkan S , maka luas daerah yang dicari merupakan luas S yang memiliki batas interval perpotongan antara fungsi $y = f(x)$ dan fungsi $y = g(x)$, dengan $f(x) \geq g(x)$. Namun jika pada daerah S dibatasi oleh garis $x = a$ dan $x = b$, maka luas daerah yang dicari adalah luas S dengan batas interval tertutup $[a,b]$, dengan $a < b$. Pada sketsa yang didapat, $f(x)$ merupakan garis atau kurva di bagian atas dari daerah S , dan $g(x)$ merupakan garis atau kurva di bagian bawah dari daerah S .

Aturan untuk menentukan luas daerah S pada luas daerah yang dibatasi oleh garis-kurva maupun oleh dua kurva, memiliki konsep yang sama, yaitu dengan menggunakan aturan integral tentu. Misalkan diketahui suatu daerah yang dibatasi oleh dua kurva seperti pada Gambar 15.1.



Gambar 15.16 Sketsa Daerah yang Dibatasi Oleh Dua Kurva

Maka menurut (Edwards & H., 2010), untuk menentukan luas daerahnya menggunakan konsep integral seperti pada Gambar 15.2.



Gambar 15.17 Konsep Integral Luas Daerah yang Dibatasi Oleh Dua Kurva

Sehingga, jika luas daerah yang dicari adalah R , maka luas R dapat dinyatakan dengan:

$$L(R) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

(Purcell & Vaberg, 2015)

Rumus tersebut berlaku untuk luas daerah di atas sumbu x , jika luasannya disebelah kanan sumbu y , maka luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva dinyatakan dengan

$$L(R) = \int_c^d (f(y) - g(y)) dy$$

(E.Vaberg, Purcell, & Rigdon, 2007)

2. Langkah-langkah Menentukan Luas Daerah yang Dibatasi Garis-Kurva atau Dua Kurva

Untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh garis-kurva atau dua kurva, perlu diperhatikan langkah-langkah berikut.

- Gambar sketsa dari soal yang diketahui

- b. Menentukan batas bawah dan atas integral dengan ketentuan jika belum diketahui interval tertutup $[a, b]$, maka batas bawah dan batas atas integral dapat dilihat pada sketsa gambar atau dengan mencari akar-akar dari kedua persamaan tersebut. Jika diketahui $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$, akar-akar ditentukan dengan persamaan $y_1 = y_2$, sehingga didapat $x = a$ sebagai batas bawah dan $x = b$ sebagai batas atas, dengan $(a < b)$.
- c. Hitung luas daerah yang dicari dengan menggunakan batas bawah dan batas atas integral dari langkah b.

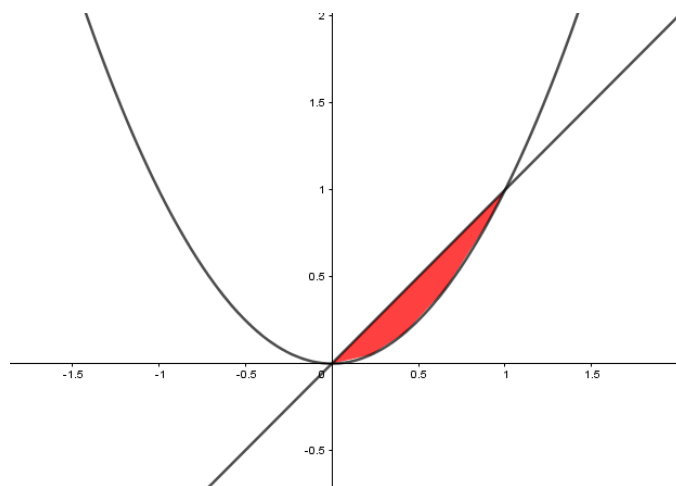
Contoh:

1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x$ dan $y = x^2$.
2. Diketahui daerah A yang dibatasi oleh kurva-kurva $x = -y^2 + 2$ dan $x = y$, tentukan:
 - a. Gambarlah sketsa daerah A
 - b. Batas bawah dan atas daerah A
 - c. Luas daerah A

Penyelesaian:

1. Langkah 1 (membuat sketsa grafik)

Berikut sketsa grafik daerah yang dibatasi oleh $y = x$ dan $y = x^2$



Gambar 15.18 Daerah yang Dibatasi Oleh $y = x$ dan $y = x^2$

Langkah 2 (menentukan batas bawah dan atas)

Cara 1: bisa langsung dilihat bahwa batas daerahnya adalah $x = 0$ dan $x = 1$, namun jika gambar kurang presisi, maka cara ini tidak dapat digunakan.

Cara 2:

Misal $y_1 = x$ dan $y_2 = x^2$, maka:

$$y_1 = y_2$$

$$x = x^2$$

$$0 = x^2 - x$$

$$0 = x(x - 1)$$

$$x = 0 \text{ atau } x = 1$$

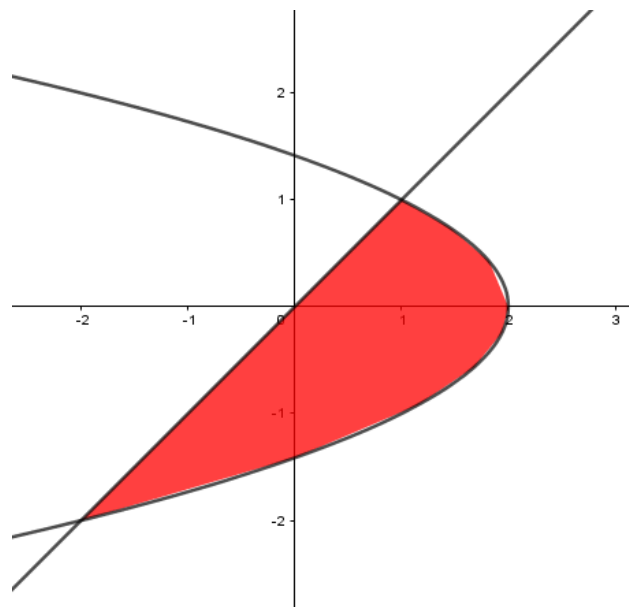
diperoleh batas bawah $x = 0$ dan batas atas $x = 1$

Langkah 3 (menentukan luas daerah)

Dari langkah 1, tampak bahwa daerah bagian atas dibatasi oleh $y = x$ dan daerah bagian bawah dibatasi oleh $y = x^2$, sehingga luas daerah tersebut adalah:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 (x - x^2) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2. a. Sketsa gambar



Gambar 15.19 Daerah yang Dibatasi Oleh $x = -y^2 + 2$ dan $x = y$

b. Batas bawah dan atas daerah A

Cara 1:

Batas bawah $y = -2$ dan batas atas $y = 1$

Cara 2:

Misal $x_1 = -y^2 + 2$ dan $x_2 = y$, maka

$$x_1 = x_2$$

$$-y^2 + 2 = y$$

$$0 = y^2 + y - 2$$

$$0 = (y - 1)(y + 2)$$

$$y = 1 \text{ atau } y = -2$$

Jadi, batas bawahnya adalah $y = -2$ dan batas atasnya adalah $y = 1$

c. Luas daerah A

Dari poin a dapat dilihat bahwa daerah bagian atas A adalah $x = -y^2 + 2$ dan daerah bagian bawah A adalah $x = y$, sehingga luasnya adalah:

$$\begin{aligned} L(A) &= \int_{-2}^1 ((-y^2 + 2) - y) dy \\ &= \left[-\frac{y^3}{3} + 2y - \frac{y^2}{2} \right]_{-2}^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 - \frac{4}{2} \right) \\ &= \left(\frac{-2+12-3}{6} \right) - \left(\frac{16-24-12}{6} \right) \\ &= \left(\frac{7}{6} \right) - \left(\frac{-20}{6} \right) \\ &= \frac{9}{2} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

C. Latihan Soal

Tentukan sketsa gambar dan luas daerah yang dibatasi oleh:

1. $y = x + 2$ dan $y = x^2$
2. $y = x^2 - 2$ dan $y = 2x^2 + x - 4$
3. $y = x$ dan $y = x^2$
4. $y = \sqrt{x}$ dan $y = -x + 6$
5. $y = x + 6$, $y = x^2$, dan $x = 1$
6. $y^2 = 4 - x$ dan $y^2 = 4 - 4x$
7. $y = (x - 3)(x - 1)$ dan $y = x$
8. $y = x^2 - 9$ dan $y = (2x - 1)(x + 3)$

9. $x = -6y^2 + 4y$ dan $x + 3y - 2 = 0$
10. $x = y^2 - 2y$ dan $x - y - 4 = 0$

D. Daftar Pustaka

E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). Calculus (Ninth Edition). Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.

Edwards, R. L., & H., B. (2010). Calculus (Ninth Edition). New York: Richard Stratton.

Purcell, E. J., & Vaberg, D. (2015). Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid Satu). Jakarta: Erlangga.

PERTEMUAN KE 16

VOLUME BIDANG PUTAR DENGAN METODE CAKRAM

A. Tujuan Pembelajaran

Adapun tujuan pembelajaran yang akan dicapai pada pertemuan ini adalah:

1. Mahasiswa mampu menggambar sketsa bidang putar terhadap sumbu x dan sumbu y;
2. Mahasiswa dapat menyelesaikan volume benda putar dengan integral tentu dengan metode cakram.

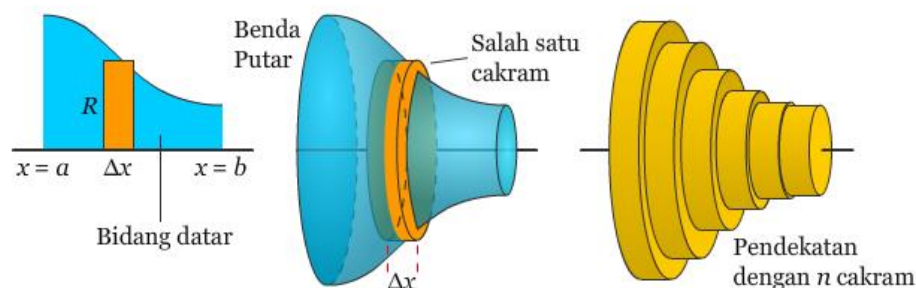
B. Uraian Materi

Aplikasi dari integral tentu dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan. Salah satunya adalah untuk menentukan volume benda yang berbentuk bangun ruang yang memiliki dua sisi yang sama, seperti corong minyak, pil, botol, piston, atau as sepeda. Dalam kaitannya dengan integral, benda-benda tersebut sering disebut benda putar (bidang putar). Ada beberapa metode untuk menentukan volume bidang putar ini, diantaranya adalah metode cakram, metode kulit tabung, dan metode cincin. Pada bab ini akan dijelaskan mengenai metode cakram.

1. Definisi Metode Cakram

Metode cakram merupakan metode mencari volume bidang putar mengasumsikan bahwa setiap bidang putar dapat dibagi menjadi beberapa partisi berbentuk cakram (perhatikan Gambar 16.1). Metode ini menggunakan konsep dasar dari rumus volume tabung (karena cakram berbentuk tabung), yaitu:

$$\text{Volume} = \pi \cdot \text{Luas Alas} \cdot \text{Tinggi}$$



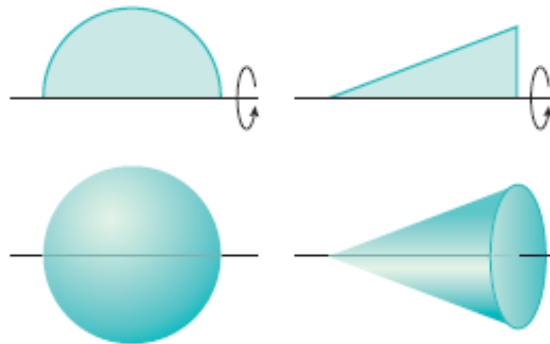
Gambar 16.20 Sketsa Konsep Metode Cakram

(Edwards & H., 2010)

Dalam penerapannya di kalkulus 2, secara garis besar volume bidang putar dibagi menjadi 2 bagian, yaitu bidang putar terhadap sumbu x dan bidang putar terhadap sumbu y. Penjelasan seperti uraian berikut.

2. Metode Cakram Pada Bidang Putar Terhadap Sumbu X

Misalkan diketahui sebuah bidang A yang merupakan daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $x = a$, dan $x = b$, kemudian bidang A diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360° . Maka lintasan yang terbentuk dari perputaran tersebut membentuk bangun ruang. Contoh-contoh sketsa gambarnya bisa dilihat pada Gambar 16.2.



Gambar 16.21 Sketsa Bidang yang Diputar 360° Mengelilingi Sumbu X

Pada Gambar 16.2 tampak bahwa bidang setengah lingkaran dan segitiga siku-siku diputar 360° mengelilingi sumbu x. Lintasan perputaran setengah lingkaran membentuk bola pejal, sedangkan lintasan segitiga siku-siku membentuk kerucut. Inilah yang disebut bidang putar terhadap sumbu x.

Untuk menghitung volume bidang A yang diputar terhadap sumbu x dirumuskan dengan persamaan metode cakram berikut.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

(E.Vaberg, Purcell, & Rigdon, 2007)

3. Metode Cakram Pada Bidang Putar Terhadap Sumbu Y

Misalkan diketahui sebuah bidang C yang merupakan daerah yang dibatasi oleh $x = f(y)$, $y = c$, dan $y = b$, kemudian bidang C diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360° . Maka lintasan yang terbentuk dari perputaran tersebut membentuk

bangun ruang. Contoh-contoh sketsa gambarnya hampir sama seperti Gambar 16.2, namun hanya berbeda di sumbu putarnya. Contoh sketsanya bisa dilihat pada Gambar 16.3.



Gambar 16.22 Sketsa Bidang yang Diputar 360° Mengelilingi Sumbu Y

Untuk menghitung volume bidang C yang diputar terhadap sumbu y dirumuskan dengan persamaan metode cakram berikut.

$$V = \pi \int_c^d (f(y))^2 dy$$

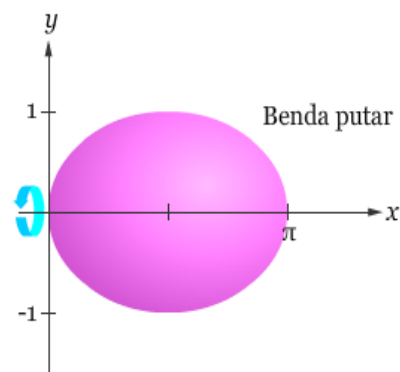
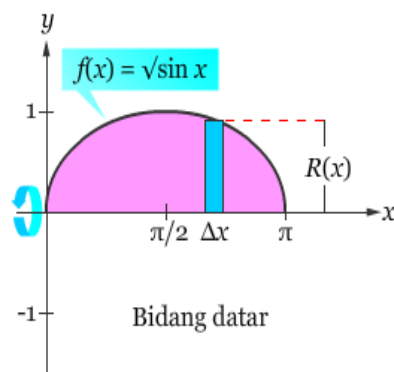
(Purcell & Vaberg, 2015)

Contoh:

1. Tentukan sketsa dan volume dari daerah yang dibatasi oleh $y = \sin x$ dan sumbu x yang diputar 360° terhadap sumbu x ($0 \leq x \leq \pi$)
2. Tentukan sketsa dan volume dari bidang putar terhadap sumbu x, yang dibentuk oleh daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$ dan $x = 4$

Penyelesaian:

1. Perhatikan gambar berikut

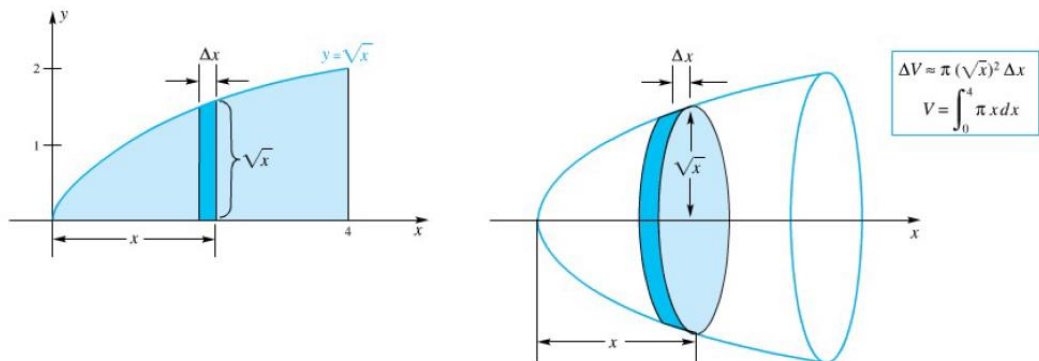


Gambar 16.23 Bidang Putar yang Dibatasi Oleh $y = \sin x$ dan sumbu x

Pada Gambar 16.4 tampak bahwa batas bawahnya adalah $x = 0$ dan batas atasnya $x = \pi$, sehingga dengan metode cakram, volumenya adalah:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{\pi} (\sqrt{\sin x})^2 dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi} \sin x dx \\
 &= \pi [-\cos x]_0^{\pi} \\
 &= \pi(1 + 1) \\
 &= 2\pi \text{ satuan volume}
 \end{aligned}$$

2. Perhatikan gambar berikut



Gambar 16.24 Bidang Putar yang Dibatasi Oleh $y = \sqrt{x}$ dan $x = 4$

Pada Gambar 16.5 tampak bahwa batas bawahnya adalah $x = 0$ dan batas atasnya $x = 4$, sehingga dengan metode cakram, volumenya adalah:

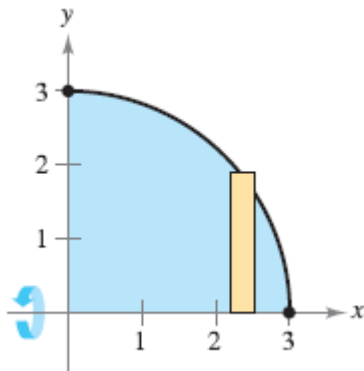
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx \\
 &= \pi \int_0^4 x dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4
 \end{aligned}$$

$$= \pi \cdot \frac{16}{2}$$

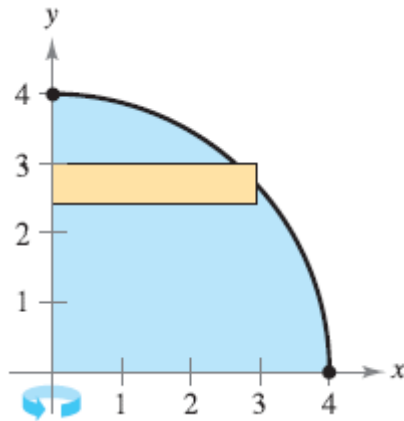
$$= 8\pi \text{ satuan volume}$$

C. Latihan Soal

1. Dengan metode cakram, tentukan sketsa dan volume bidang putar terhadap sumbu x yang dibatasi oleh:
 - a. $y = -x + 1$, $x = 0$, dan $x = 1$
 - b. $y = 4 - x^2$, $x = 0$, dan $x = 2$
 - c. $y = 1 - x^2$ dan sumbu x
 - d. $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, dan $x = 2$
 - e. $y = \sqrt{9 - x^2}$



2. Dengan metode cakram, tentukan sketsa dan volume bidang putar terhadap sumbu y yang dibatasi oleh:
 - a. $y = 3 - 2x$, $y = 0$, dan $y = 2$
 - b. $x = \sqrt{y}$, $y = 0$, dan $y = 4$
 - c. $x = 2y - y^2$, $x = 0$
 - d. $x = y^2$, $x = 0$, dan $y = 3$
 - e. $y = \sqrt{9 - x^2}$



D. Daftar Pustaka

E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). Calculus (Ninth Edition). Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.

Edwards, R. L., & H., B. (2010). Calculus (Ninth Edition). New York: Richard Stratton.

Purcell, E. J., & Vaberg, D. (2015). Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid Satu). Jakarta: Erlangga.

PERTEMUAN KE 17

VOLUME BIDANG PUTAR DENGAN METODE KULIT TABUNG

A. Tujuan Pembelajaran

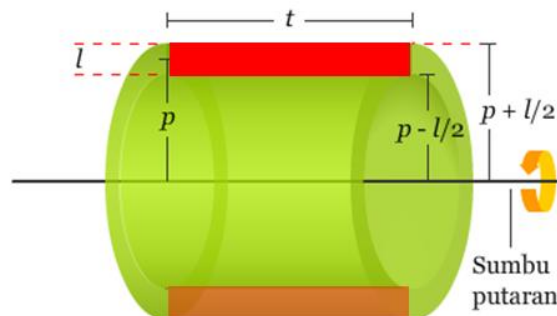
Adapun tujuan pembelajaran yang akan dicapai pada pertemuan ini adalah:

1. Mahasiswa mampu menggambar sketsa bidang putar terhadap sumbu x dan sumbu y;
2. Mahasiswa dapat menyelesaikan volume benda putar dengan integral tentu dengan metode kulit tabung.

B. Uraian Materi

1. Definisi Metode Kulit Tabung

Metode kulit tabung merupakan salah satu teknik integral tentu yang digunakan untuk menentukan volume bidang putar yang berbentuk kulit tabung. Untuk memahami konsep metode kulit tabung, perhatikan sketsa pada Gambar 17.1.



Gambar 17.25 Sketsa Bidang Putar Berbentuk Kulit Tabung

Pada Gambar 17.1 tampak bahwa terdapat persegi panjang dengan panjang $= t$ dan lebar $= l$, sedangkan p merupakan jarak antara sumbu putaran dengan pusat persegi panjang. Ketika persegi panjang tersebut diputar 360° menurut sumbu putaran (misal sumbu x), maka akan dihasilkan kulit tabung dengan ketebalan l . Untuk menentukan volume kulit tabung tersebut, perhatikan 2 tabung (kulit dalam dan luar) yang tampak pada Gambar 17.1. Jari-jari tabung yang lebih besar merupakan jari-jari dari kulit luar tabung, sedangkan jari-jari yang lebih kecil merupakan jari-jari dari kulit dalam tabung. Sehingga didapat p sebagai rata-rata dari jari-jari kulit tabung, jari-jari luarnya $= p + \frac{l}{2}$, jari-jari dalamnya $= p - \frac{l}{2}$. Berdasarkan konsep ini, maka didapatkan volume kulit tabung sebagai berikut.

Volume kulit tabung = (volume kulit luar) – (volume kulit dalam)

$$= \pi \left(p + \frac{l}{2} \right)^2 \cdot t - \pi \left(p - \frac{l}{2} \right)^2 \cdot t$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot p \cdot t \cdot l$$

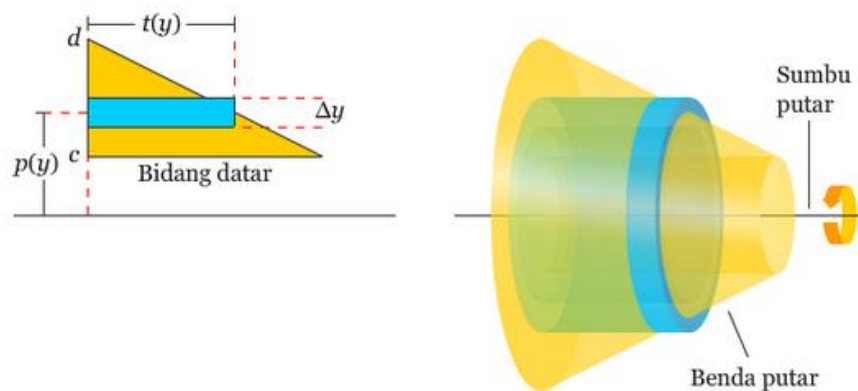
atau

$$= 2 \cdot \pi \cdot (\text{rata-rata jari-jari}) \cdot (\text{panjang}) \cdot (\text{tebal})$$

(Hass, Weir, George B. Thomas, & Hell, 2016)

2. Menentukan Volume Bidang Putar Dengan Metode Kulit Tabung

Dengan menggunakan konsep rumus yang didapat pada poin 1, maka dapat ditentukan rumus untuk menentukan bidang putar terhadap sumbu x berbentuk kulit tabung sebagai berikut.



Gambar 17.26 Sketsa Bidang Putar Berbentuk Kulit Tabung Dengan Panjang $t(y)$ dan Lebar Δy

Apabila diperhatikan, lebar dari persegi panjang pada Gambar 17.2 adalah Δy , sehingga jika persegi panjang diputar terhadap garis yang sejajar dengan sumbu x, maka akan menghasilkan kulit tabung dengan volume sebagai berikut.

$$\Delta V = 2\pi[p(y) \cdot t(y)] \cdot \Delta y$$

(Anton, Bivens, & Davis, 2012)

Dengan menggunakan konsep integral tentu, maka rumus tersebut dapat ditulis menjadi:

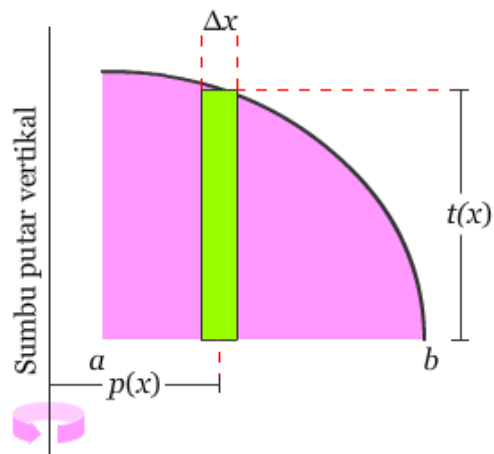
$$V = 2\pi \int_c^d [p(y) \cdot t(y)] dy$$

(Purcell & Vaberg, 2015)

Jika sumbu putarnya adalah sumbu y (seperti Gambar 17.3), maka digunakan rumus:

$$V = 2\pi \int_a^b [p(x) \cdot t(x)] dx$$

(E.Vaberg, Purcell, & Rigdon, 2007)



Gambar 17.27 Sketsa Bidang dengan Sumbu Putar Sumbu y

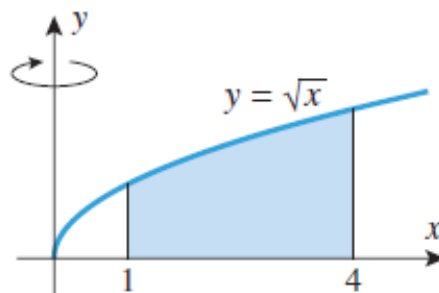
Contoh:

Dengan metode kulit tabung, tentukan volume dari benda putar yang dibatasi oleh :

1. $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, dan $x = 4$ jika sumbu putarnya adalah sumbu y
2. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, dan $x = 1$ jika sumbu putarnya adalah sumbu y

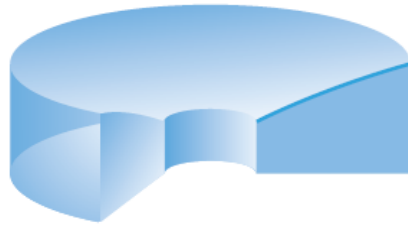
Penyelesaian:

1. Langkah pertama adalah membuat sketsa grafik dari daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, dan $x = 4$ sebagai berikut.



Gambar 17.3. Sketsa Bidang yang Dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, dan $x = 4$

Dari Gambar 17.3, maka diperoleh sketsa bidang putar sebagai berikut.

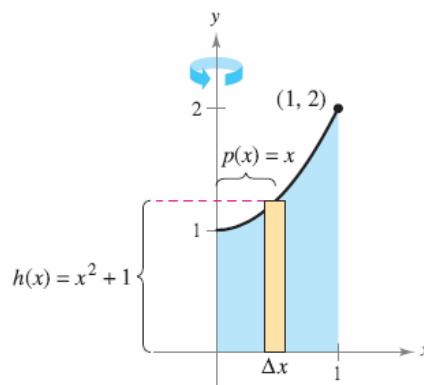


Gambar 17.28 Sketsa Bidang Putar Terhadap Sumbu y

Dengan menggunakan metode kulit tabung, maka volumenya adalah:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_1^4 2\pi \cdot x \cdot \sqrt{x} \, dx \\
 &= 2\pi \int_1^4 x^{3/2} \, dx \\
 &= \left[2\pi \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} \right]_1^4 \\
 &= \frac{124\pi}{5} \text{ satuan volume}
 \end{aligned}$$

2. Sketsa dari daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, dan $x = 1$ ditunjukkan oleh Gambar 17.5 berikut.



Gambar 17.29 Sketsa Bidang yang Dibatasi oleh $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, dan $x = 1$

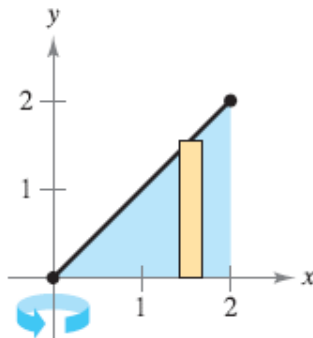
Dari sketsa tersebut, maka volume benda putarnya adalah:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 2\pi \cdot x \cdot (x^2 + 1) \, dx \\
 &= 2\pi \int_0^1 (x^3 + x) \, dx \\
 &= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} \right]_0^1 \\
 &= 2\pi \left(\frac{3}{4} \right) \\
 &= \frac{3\pi}{4} \text{ satuan volume}
 \end{aligned}$$

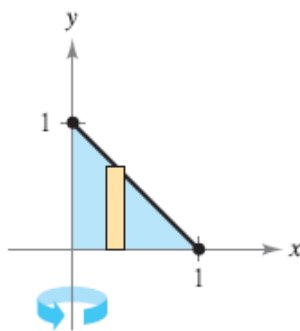
C. Latihan Soal

1. Dengan menggunakan metode kulit tabung, tentukan volume dari daerah yang diarsir berikut jika diputar terhadap sumbu y .

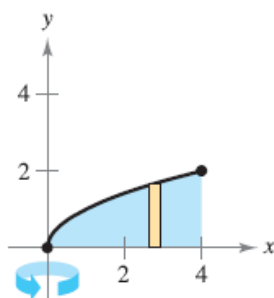
a. $y = x$



b. $y = 1 - x$



c. $y = \sqrt{x}$



2. Tentukan sketsa dan volume benda putar terhadap sumbu y untuk daerah yang dibatasi oleh:

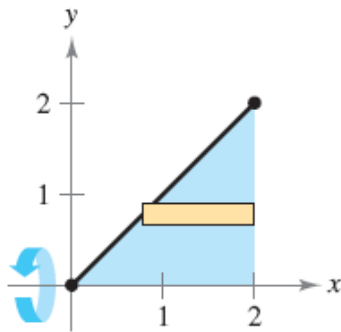
a. $y = x^2$, $y = 0$, dan $x = 3$

b. $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 0$, dan $x = 6$

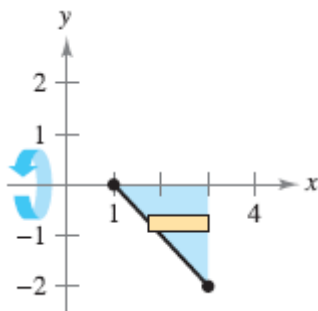
c. $y = 4 - x^2$, $x = 0$, dan $y = 4$

3. Dengan menggunakan metode kulit tabung, tentukan volume dari daerah yang diarsir berikut jika diputar terhadap sumbu x .

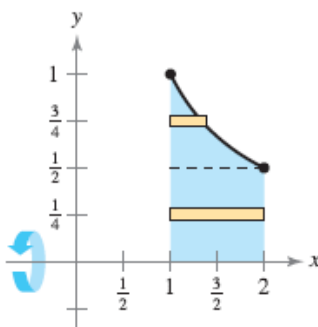
a. $y = x$



b. $y = 1 - x$



c. $y = \frac{1}{x}$



4. Tentukan sketsa dan volume benda putar terhadap sumbu x untuk daerah yang dibatasi oleh:

a. $x + y = 4$, $y = x$, dan $y = 0$

b. $y = \sqrt{x+2}$, $y = x$, $y = 0$

c. $y = x^2$, $x = 0$, dan $y = 9$

D. Daftar Pustaka

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). Calculus 10th Edition. New York: Laurie Rosatone.

E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). Calculus (Ninth Edition). Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.

Hass, J., Weir, M. D., George B. Thomas, J., & Hell, C. (2016). University Calculus Early Transcendental. New York: Pearson Education, Inc.

Purcell, E. J., & Vaberg, D. (2015). Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid Satu). Jakarta: Erlangga.

PERTEMUAN KE 18

VOLUME BIDANG PUTAR DENGAN METODE CINCIN

A. Tujuan Pembelajaran

Adapun tujuan pembelajaran yang akan dicapai pada pertemuan ini adalah:

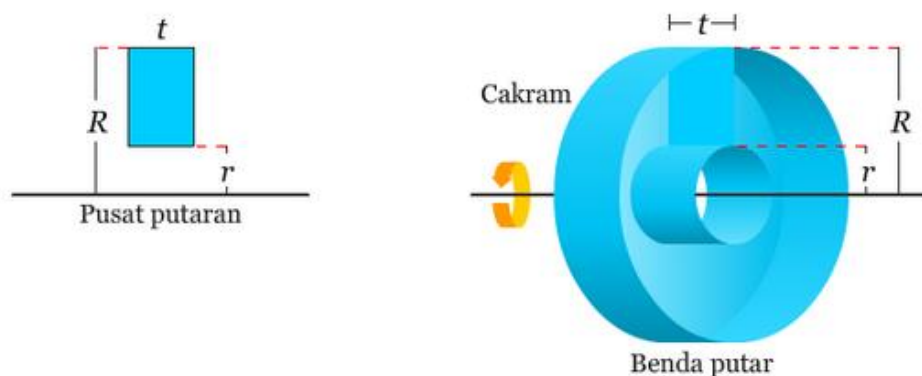
1. Mahasiswa mampu menggambar sketsa bidang putar terhadap sumbu x dan sumbu y ;
2. Mahasiswa dapat menyelesaikan volume benda putar dengan integral tertentu dengan metode cincin.

B. Uraian Materi

1. Definisi Metode Cincin

Metode cincin adalah salah satu metode integral tentu yang digunakan untuk menentukan volume bidang yang memiliki lubang. Metode cincin disebut juga *washer method*, yang merupakan konsep turunan dari metode cakram. Metode cakram maupun metode cincin, sama-sama memakai semua elemen volume yang terbuat dari irisan-irisan tabung yang tipis. Irisan-irisan tersebut berbentuk menyerupai cakram ketika bidang diibaratkan benda padat padatnya, sedangkan berbentuk seperti cincin ketika irisan-irisan tersebut memiliki lubang sepanjang sumbu yang tentukan (sumbu x atau y) (Thomas, weir, & Hass, 2017).

Cincin dalam metode ini dibentuk oleh hasil putaran sebuah partisi persegi panjang terhadap sumbu putaran tertentu, dimana sumbu putaran tidak berimpit dengan sisi persegi panjang, seperti pada sketsa berikut.



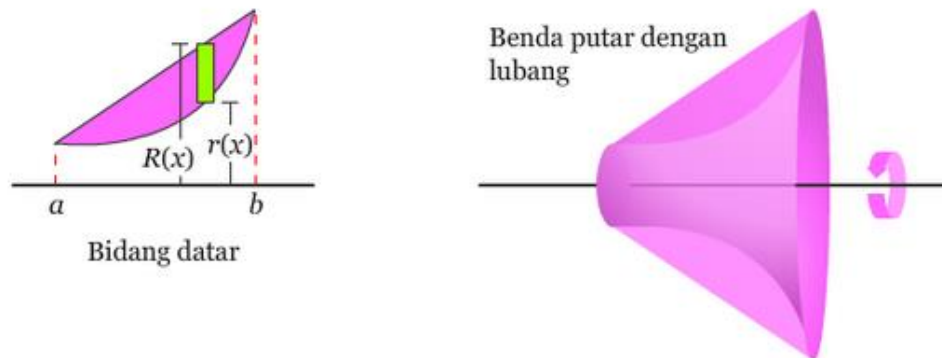
Gambar 18.30 Sketsa Konsep Dasar Metode Cincin

Dari Gambar 18.1, jika r dan R secara berturut-turut merupakan jari-jari dalam dan luar dari cincin dan t merupakan ketebalan cincin, maka volumenya diuraikan sebagai berikut.

$$V = \pi(R^2 - r^2)$$

(Anton, Bivens, & Davis, 2012)

Untuk mengetahui bagaimana konsep ini diterapkan untuk menentukan volume bidang putar, perhatikan daerah yang dibatasi oleh jari-jari luar $R(x)$ dan jari-jari dalam $r(x)$ pada Gambar 18.2.



Gambar 18.31 Sketsa Penerapan Metode Cincin

Pada Gambar 18.2, tampak bahwa terdapat sebuah bidang datar yang diputar mengelilingi sumbu x sehingga membentuk bidang putar yang memiliki lubang dengan partisi persegi panjang dengan ukuran antara $R(x)$ sampai $r(x)$. Berdasarkan rumus yang diperoleh dari Gambar 18.1, maka rumus volume bidang putar Gambar 18.2 diuraikan sebagai berikut.

$$V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx$$

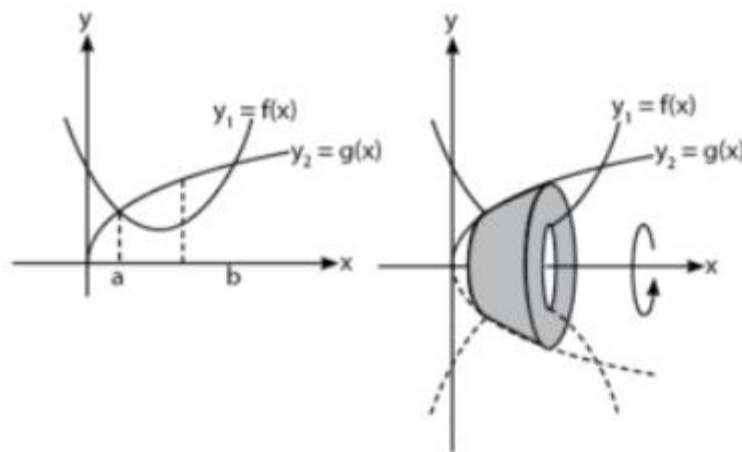
(Purcell & Vaberg, 2015)

2. Menentukan Volume Bidang Putar Dengan Metode Cincin

Persoalan volume bidang putar yang diselesaikan dengan metode cincin umumnya terdiri dari daerah yang dibatasi oleh dua fungsi yang berbeda. Namun, langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan persoalan dengan metode cincin tidak jauh beda dengan metode cakram dan metode kulit tabung, yaitu sebelum menentukan volume dari bidang putar, harus terlebih dulu mampu membuat sketsa dari bidang yang diketahui.

a. Metode Cincin pada Bidang Putar Terhadap Sumbu x

Misalkan diketahui suatu bidang B yang merupakan daerah yang dibatasi oleh dua kurva yaitu $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, $x = a$, dan $x = b$, dengan $y_1 \geq y_2$. Dimana y_1 merupakan kurva yang membatasi bagian atas bidang B, sedangkan y_2 merupakan kurva yang membatasi bagian bawah B. Jika bidang B diputar 360° terhadap sumbu x, maka lintasan dari putaran tersebut akan membentuk benda seperti Gambar 18.3 sebagai berikut.



Gambar 18.32 Sketsa Bidang yang Diputar 360° Mengelilingi Sumbu X

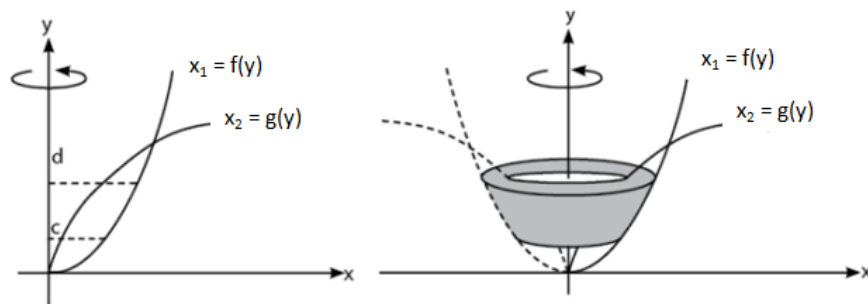
Untuk menghitung volume bidang B yang diputar terhadap sumbu x dirumuskan dengan persamaan:

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

(E.Vaberg, Purcell, & Rigdon, 2007)

b. Metode Cincin pada Bidang Putar Terhadap Sumbu y

Jika terdapat kasus bidang D yang merupakan daerah yang dibatasi oleh dua kurva yaitu $x_1 = f(y)$, $x_2 = g(y)$, $y = c$, dan $y = d$, dengan $x_1 \geq x_2$. Dimana x_1 merupakan kurva yang membatasi bagian atas bidang D, sedangkan x_2 merupakan kurva yang membatasi bagian bawah D. Jika bidang D diputar 360° terhadap sumbu y, maka lintasan dari putaran tersebut akan membentuk benda seperti Gambar 18.4 sebagai berikut.



Gambar 18.33 Sketsa Bidang yang Diputar 3600 Mengelilingi Sumbu Y

Untuk menghitung volume bidang D yang diputar terhadap sumbu y dirumuskan dengan persamaan:

$$V = \pi \int_c^d (f(y)^2 - g(y)^2) dy$$

(Purcell & Vaberg, 2015)

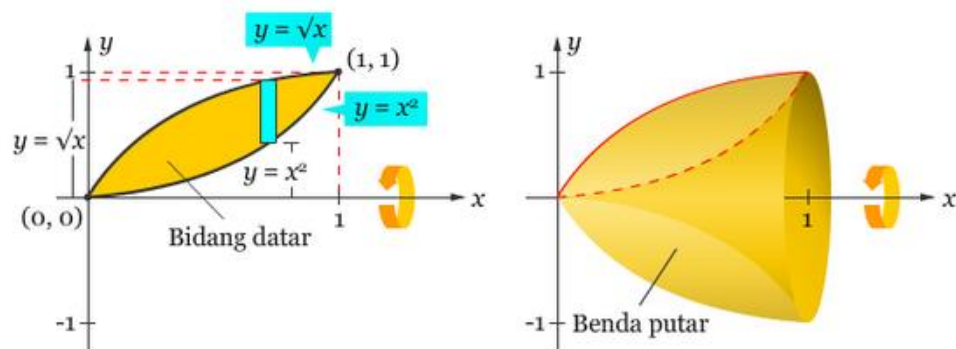
Contoh:

Dengan metode cincin, tentukan volume benda putar yang dibentuk oleh daerah yang dibatasi oleh:

1. $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$ yang diputar mengelilingi sumbu x
2. $y = x^2 + 1$ dan $y = -x + 3$ yang diputar mengelilingi sumbu x

Penyelesaian:

1.



Gambar 18.34 Sketsa Daerah yang Dibatasi Oleh $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$ yang Diputar Mengelilingi Sumbu x

Dari Gambar 18.5, dapat ditentukan bahwa batas interval untuk pengintegralannya adalah antara 0 dan 1, sedangkan jari-jari luar dan dalamnya berturut-turut adalah:

$$R(x) = \sqrt{x}$$

$$r(x) = x^2$$

Sehingga volumenya adalah:

$$V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx$$

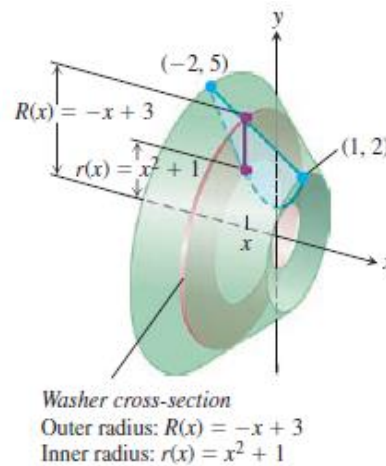
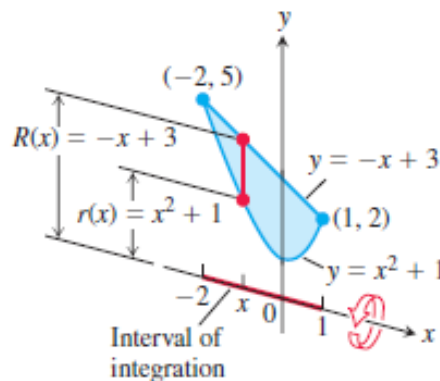
$$= \pi \int_0^1 ((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2) dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1$$

$$= \frac{3\pi}{10} \text{ satuan volume}$$

2.



Gambar 18.35 Sketsa Daerah yang Dibatasi oleh $y = x^2 + 1$ dan $y = -x + 3$ yang diputar mengelilingi sumbu x yang diputar mengelilingi sumbu x

Dari Gambar 18.6, dapat ditentukan bahwa batas interval untuk pengintegralannya adalah antara -2 dan 1, sedangkan jari-jari luar dan dalamnya berturut-turut adalah:

$$R(x) = -x + 3$$

$$r(x) = x^2 + 1$$

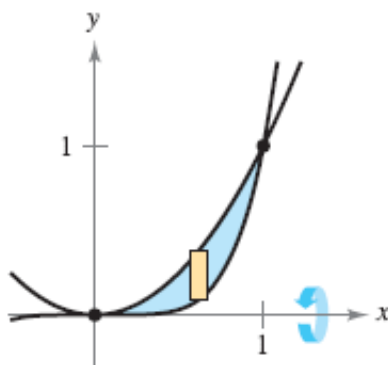
Sehingga volumenya adalah:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx \\ &= \pi \int_{-2}^1 ((-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2) dx \\ &= \pi \int_{-2}^1 (8 - 6x - x^2 - x^4) dx \\ &= \pi \left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{117\pi}{5} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

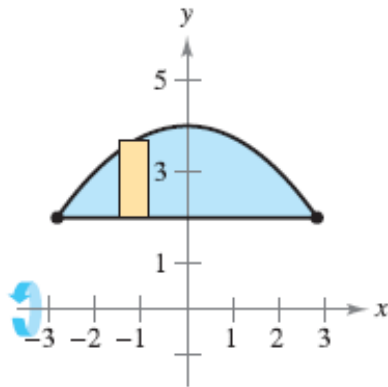
C. Latihan Soal

Dengan metode cincin, tentukan volume bidang putar yang dibentuk oleh daerah yang dibatasi oleh:

1. $y = x^2$ dan $y = 2x$ jika diputar terhadap sumbu x
2. $y = x^2$ dan $y = 2x$ jika diputar terhadap sumbu y
3. $x = (y - 2)^2$ dan $x + y = 4$ jika diputar mengelilingi sumbu y
4. $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 4$ jika diputar terhadap sumbu x
5. $y = x^2$ dan $y = x^5$



6. $y = 2$ dan $y = 4 - \frac{x^2}{4}$



7. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, dan $x = 3$
 - a. Jika diputar terhadap sumbu x
 - b. Jika diputar terhadap sumbu y
8. $y = 2x^2$, $y = 0$, dan $x = 2$
 - a. Jika diputar terhadap sumbu x
 - b. Jika diputar terhadap sumbu y
9. $y = x^2$ dan $y = 4x - x^2$ jika diputar terhadap sumbu x
10. $y = 6 - 2x - x^2$ dan $y = x + 6$

D. Daftar Pustaka

- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). Calculus 10th Edition. New York: Laurie Rosatone.
- E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). Calculus (Ninth Edition). Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.
- Purcell, E. J., & Vaberg, D. (2015). Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid Satu). Jakarta: Erlangga.
- Thomas, G. B., weir, M. D., & Hass, J. (2017). Kalkulus Thomas (Edisi Ketiga Belas Jilid 1). Jakarta: Erlangga.

GLOSARIUM

Aljabar	: salah satu cabang matematika yang mempelajari tentang pemecahan masalah menggunakan simbol – simbol sebagai pengganti konstanta dan variabel
Bilangan Irrasional	: bilangan yang tidak dapat dinyatakan dengan bilangan pecahan atau bilangan yang bukan bilangan rasional (seperti 2, 3, 5, 7).
Eksponensial	: sesuatu yang bersifat atau berhubungan dengan eksponen. Dalam matematika ditulis dengan notasi $\exp(x)$ atau e^x , di mana e adalah basis logaritma natural yang kira-kira sama dengan 2.71828183
Fungsi	: secara teknis sebagai sebuah proses yang memetakan (memasangkan) satu buah input ke persamaan dengan satu buah output. Secara definisi matematisnya: sebuah fungsi f dengan nilai real yang didefinisikan pada himpunan bilangan real D yang disebut domain adalah aturan yang memetakan setiap bilangan x yang berada dalam D ke tepat satu bilangan real yang dinyatakan dengan $f(x)$.
Garis singgung	: garis lurus yang menyentuh kurva pada satu titik. Titik tersebut terletak pada kurva, disebut titik singgung
Integral	: bentuk operasi matematika yang menjadi kebalikan dari operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu.
Kalkulus	: bagian matematika yang terutama melibatkan pengertian dan penggunaan diferensial dan integral fungsi serta konsep yang berkaitan
Kalkulus Integral	: analisis matematis tentang teknik penemuan ungkapan dan evaluasi fungsi integral, khususnya untuk kalkulasi luas, panjang, lengkung, volume, dan nomor serta penyelesaian persamaan diferensial sederhana
Koordinat	: bilangan yang dipakai untuk menunjukkan lokasi suatu titik dalam garis, permukaan, atau ruang.

Logaritma : eksponen pangkat yang diperlukan untuk memangkatkan bilangan dasar supaya beroleh bilangan tertentu (jika bilangan dasarnya 10, maka $\log 100 = 2$, artinya 10 pangkat 2 = 100); kebalikan dari hitungan pangkat.

Operasi matematika : operasi hitung suatu bilangan, mengenai mengenal angka, penjumlahan - pengurangan - perkalian - pembagian

Radian : satuan pengukuran yang besarnya $180 / \pi ^\circ$

Variable : segala sesuatu yang menjadi objek penelitian, atau apa yang menjadi fokus di dalam suatu penelitian

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus 10th Edition*. New York: Laurie Rosatone.
- E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). *Calculus (Ninth Edition)*. Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.
- Edutafsi.com. (2018, Januari 24). *Rumus Dasar Integral Fungsi Trigonometri Dilengkapi Dengan Contoh*. Dipetik Januari 26, 2019, dari Edutafsi.com: <http://www.edutafsi.com/2018/01/rumus-lengkap-integral-fungsi-trigonometri.html>
- Edwards, R. L., & H., B. (2010). *Calculus (Ninth Edition)*. New York: Richard Stratton.
- Hass, J., Weir, M. D., George B. Thomas, J., & Hell, C. (2016). *University Calculus Early Transcendental*. New York: Pearson Education, Inc.
- Purcell, E. J., & Vaberg, D. (2015). *Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid Satu)*. Jakarta: Erlangga.
- Ratnadewi; dkk. (2016). *Matematika Teknk untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains.
- Slamet H.W. (2003). *Kalkulus 2*. Surakarta: UMS.
- Thomas, G. B., weir, M. D., & Hass, J. (2017). *Kalkulus Thomas (Edisi Ketiga Belas Jilid 1)*. Jakarta: Erlangga.

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)

Fakultas : Teknik
Prasyarat : Kalkulus 1
Semester : II
Deskripsi Mata Kuliah : Mata kuliah Kalkulus 2 merupakan mata kuliah Wajib Fakultas Teknik rumpun matematika yang diberikan pada semester 2 yang membahas tentang dasar integral, Aturan Substitusi Integral Tak Tentu, Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri, Aturan Substitusi Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri, Integral Tentu Fungsi Aljabar, Integral Tentu Fungsi Aljabar, Integral Tentu Fungsi Trigonometri, Aturan Substitusi Integral Tak Tentu Fungsi Eksponensial, Aturan Substitusi Integral Tentu Fungsi Eksponensial, Integral Fungsi Rasional, Integral Parsial Tak Tentu, Integral Parsial Tak Tentu, Integral Parsial Tentu, luas bidang yang dibatasi fungsi tertentu, dan volume bidang putar. Setelah menyelesaikan mata kuliah ini mahasiswa diharapkan mampu menyelesaikan masalah dan persoalan integral beserta aplikasinya.
Penyusun :

1. Ersam Mahendrawan, S.Pd., M.Pd. (Ketua)
2. Ihat Solihat, S.Si., M.Sc. (Anggota 1)
3. Sulanjari, S.Si., M.Sc. (Anggota 2)
4. Agustina Dyah Setyowati, S.Si., M.Sc. (Anggota 3)

Mata Kuliah/Kode : Kalkulus 2/TEK0033
Sks : 3 Sks
Kurikulum : KKNi
Capaian Pembelajaran : Setelah menyelesaikan matakuliah kalkulus 2, mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan berbagai macam tipe integral, menerapkannya aplikasinya pada luas bidang dan volume bidang putar dengan tepat.

Pertemuan Ke-	Kemampuan Akhir yang Diharapkan	Bahan Kajian (Materi Ajar)	Metode Pembelajaran	Pengalaman Belajar Mahasiswa	Kriteria Penilaian	Bobot Nilai
1	Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan dasar integral tak tentu.	Aturan Dasar Integral	Ceramah dan simulasi	Latihan Soal 1	Ketepatan perhitungan	5%
2	Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan	Aturan Substitusi Integral Tak Tentu	Ceramah dan simulasi	Latihan Soal 2	Ketepatan perhitungan	5%

Pertemuan Ke-	Kemampuan Akhir yang Diharapkan	Bahan Kajian (Materi Ajar)	Metode Pembelajaran	Pengalaman Belajar Mahasiswa	Kriteria Penilaian	Bobot Nilai
	integral tak tentu dengan aturan substitusi.					
3	Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan integral tak tentu fungsi trigonometri.	Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri	Ceramah dan praktek	Latihan Soal 3	Ketepatan perhitungan	5%
4	Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan integral tak tentu fungsi trigonometri dengan aturan substitusi.	Aturan Substitusi Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri	Diskusi dan Simulasi	Latihan Soal 4	Ketepatan perhitungan	5%
5	Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan integral tentu fungsi aljabar.	Integral Tentu Fungsi Aljabar	Diskusi dan Simulasi	Latihan Soal 5	Ketepatan perhitungan	6%
6	Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan integral tentu fungsi trigonometri.	Integral Tentu Fungsi Trigonometri	Praktek dan Simulasi	Latihan Soal 6	Ketepatan perhitungan	6%
7	Mahasiswa mampu menyelesaikan aturan dasar integral tak tentu metode substitusi ke dalam fungsi aljabar.	Aturan Substitusi Integral Tentu Fungsi Aljabar	Ceramah dan Simulasi	Latihan Soal 7	Ketepatan perhitungan	6%

Pertemuan Ke-	Kemampuan Akhir yang Diharapkan	Bahan Kajian (Materi Ajar)	Metode Pembelajaran	Pengalaman Belajar Mahasiswa	Kriteria Penilaian	Bobot Nilai
8	Mahasiswa mampu menyelesaikan aturan dasar integral tak tentu metode substitusi ke dalam fungsi Trigonometri.	Aturan Substitusi Integral Tentu Fungsi Trigonometri	Diskusi dan Simulasi	Latihan Soal 8	Ketepatan perhitungan	6%
9	Mahasiswa mampu menyelesaikan integral tak tentu fungsi eksponensial dengan aturan substitusi.	Aturan Substitusi Integral Tak Tentu Fungsi Eksponensial	Ceramah dan simulasi	Latihan Soal 9	Ketepatan perhitungan	6%
UTS						
10	Mahasiswa mampu menyelesaikan integral tentu fungsi eksponensial dengan aturan substitusi.	Aturan Substitusi Integral Tentu Fungsi Eksponensial	Ceramah dan Simulasi	Latihan Soal 13	Ketepatan perhitungan	5%
11	Mahasiswa mampu menyelesaikan aturan dasar integral fungsi rasional.	Integral Fungsi Rasional	Simulasi dan Diskusi	Latihan Soal 13	Ketepatan perhitungan	5%
12	Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan pengintegralan parsial tak tentu.	Integral Parsial Tak Tentu	Simulasi dan Diskusi	Latihan Soal 13	Ketepatan perhitungan	5%
13	Mahasiswa mampu	Integral Parsial	Ceramah dan Simulasi	Latihan Soal 13	Ketepatan	5%

Pertemuan Ke-	Kemampuan Akhir yang Diharapkan	Bahan Kajian (Materi Ajar)	Metode Pembelajaran	Pengalaman Belajar Mahasiswa	Kriteria Penilaian	Bobot Nilai
	menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan pengintegralan parsial tentu.	Tentu			perhitungan	
14	1. Mahasiswa mampu menggambar grafik dari persamaan linier dan kuadrat; 2. Mahasiswa mampu menyelesaikan dan menghitung luas daerah yang dibatasi garis dan kurva menggunakan integral tentu.	Luas Daerah yang Dibatasi Sumbu X dan Y	Praktek dan Simulasi	Latihan Soal 14	Ketepatan perhitungan	5%
15	1. Mahasiswa mampu menentukan luas daerah yang dibatasi oleh garis dan kurva; 2. Mahasiswa mampu menentukan luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva.	Luas Daerah yang Dibatasi Garis-Kurva dan Dua Kurva	Praktek dan Simulasi	Latihan Soal 15	Ketepatan perhitungan	6%
16	1. Mahasiswa mampu menggambar sketsa bidang putar terhadap sumbu x dan sumbu y; 2. Mahasiswa dapat menyelesaikan volume benda	Volume Bidang Putar dengan Metode Cakram	Praktek dan Simulasi	Latihan Soal 16	Ketepatan perhitungan	6%

Pertemuan Ke-	Kemampuan Akhir yang Diharapkan	Bahan Kajian (Materi Ajar)	Metode Pembelajaran	Pengalaman Belajar Mahasiswa	Kriteria Penilaian	Bobot Nilai
	putar dengan integral tentu dengan metode cakram.					
17	1. Mahasiswa mampu menggambar sketsa bidang putar terhadap sumbu x dan sumbu y; 2. Mahasiswa dapat menyelesaikan volume benda putar dengan integral tentu dengan metode kulit tabung.	Volume Bidang Putar dengan Metode Kulit Tabung	Praktek dan Simulasi	Latihan Soal 17	Ketepatan perhitungan	6%
18	1. Mahasiswa mampu menggambar sketsa bidang putar terhadap sumbu x dan sumbu y; 2. Mahasiswa dapat menyelesaikan volume benda putar dengan integral tertentu dengan metode cincin.	Volume Bidang Putar dengan Metode Cincin	Praktek dan Simulasi	Latihan Soal 18	Ketepatan perhitungan	7%
UAS						

Referensi:

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus 10th Edition*. New York: Laurie Rosatone.

E.Vaberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). *Calculus (Ninth Edition)*. Addison Wesley: Prentice Hall, Inc.

Edutafsi.com. (2018, Januari 24). *Rumus Dasar Integral Fungsi Trigonometri Dilengkapi Dengan Contoh*. Dipetik Januari 26, 2019, dari Edutafsi.com: <http://www.edutafsi.com/2018/01/rumus-lengkap-integral-fungsi-trigonometri.html>

Edwards, R. L., & H., B. (2010). *Calculus (Ninth Edition)*. New York: Richard Stratton.

Hass, J., Weir, M. D., George B. Thomas, J., & Hell, C. (2016). *University Calculus Early Transcendental*. New York: Pearson Education, Inc.

Purcell, E. J., & Vaberg, D. (2015). *Kalkulus dan Geometri Analitis (Edisi Kelima Jilid Satu)*. Jakarta: Erlangga.

Ratnadewi; dkk. (2016). *Matematika Teknk untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains.

Slamet H.W. (2003). *Kalkulus 2*. Surakarta: UMS.

Thomas, G. B., weir, M. D., & Hass, J. (2017). *Kalkulus Thomas (Edisi Ketiga Belas Jilid 1)*. Jakarta: Erlangga.

Dekan Fakultas Teknik

Pamulang, Oktober 2019
Ketua Tim Penyusun

Syaiful Bahri, ST, M.Eng.Sc., Ph.D
NIDN. 0421127402

Ersam Mahendrawan, S.Pd., M.Pd.
NIDN. 0413088901