

ISBN: 978-623-5437-65-1

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

Maghfiroh Yanuarti
Endah Asmarawati
Ivan Putranto
Tri Sulistyani



Matematika Ekonomi dan Bisnis

Maghfiroh Yanuarti, et al..

UNPAM PRESS
Lembaga Penerbit & Publikasi

Redaksi:
Jl. Surya Kecana No. 1
Ruang 212 Gedung A
Pamulang - Tangerang Selatan
Telp. 021-7412566, Fax. 021 74709855
Email: unpampress@unpam.ac.id
Website: unpampress.unpam.ac.id

ISBN 978-623-5437-65-1



PERTEMUAN I

SISTEM BILANGAN

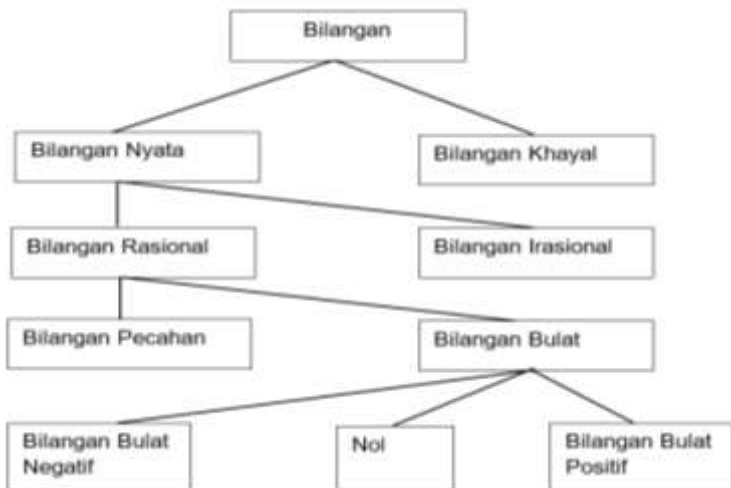
A. Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari materi pada pertemuan ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Memahami Konsep system bilangan
2. Membedakan jenis-jenis bilangan
3. Menganalisis sifat-sifat bilangan

B. Materi

1. Skema Himpunan Bilangan



Gambar 1. 1 Skema Himpunan Bilangan

a. Bilangan Nyata dan Bilangan Khayal

Suatu bilangan nyata dapat berupa negative dan positif, sedangkan bilangan khayal merupakan bilangan negative yang terdapat dalam tanda akar. Kedua bilangan tersebut memiliki perbedaan, perbedaan antara kedua bilangan tersebut adalah jika pada bilangan nyata terdapat salah satu sifat tegas yaitu positif dan negatif atau tidak keduanya. Sedangkan bilangan khayal tidak jelas sifatnya apakah bernilai positif atau negatif.

Contoh bilangan nyata : 2 ; - 2 ; 1,5 ; -1,5

Contoh bilangan khayal : $\sqrt{-9}$; $\sqrt{-12}$; $\sqrt{-3,14}$

b. Bilangan Rasional dan Irasional

Hasil bagi antara dua bilangan yaitu bilangan bulat atau pecahan dan bilangan decimal berulang atau decimal terbatas disebut bilangan rasional. Sedangkan bilangan irasional merupakan hasil bagi dua bilangan pecahan dengan bilangan decimal tak berulang dan tak terbatas. Termasuk nilai dari π dan juga nilai dari e .

Contoh bilangan rasional: 0,124313131;
0.4923232323

Contoh bilangan irasional: 0,1492525393993999...

c. Bilangan Pecahan dan Bilangan Bulat

Bilangan pecahan merupakan hasil bagi antara dua bilangan yang hasilnya pecahan dengan desimal terbatas. Bilangan pecahan dapat juga ditulis dalam bentuk desimal. Uraian desimalnya selalu berakhir atau berulang. Sedangkan bilangan bulat merupakan hasil bagi dua bilangan yang hasilnya bulat. Bilangan bulat terbagi menjadi tiga bagian yaitu bilangan bulat negatif $(-1, -2, -3, -4, \dots)$, bilangan bulat nol (0) dan bilangan bulat positif $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$

Contoh bilangan pecahan :

$$\frac{1}{2} = 0,5 \text{ (artinya } \frac{1}{2} = 0 + \frac{5}{10} \text{)}$$

$$\frac{21}{50} = 0,42 \text{ (artinya } \frac{21}{50} = 0 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} \text{)}$$

$$\frac{2}{7} = 0,285714\dots \text{ (angka 285714 berulang)}$$

d. Bilangan Desimal

Bilangan desimal adalah angka-angka yang terletak disebelah kanan tanda koma. Angka desimal ini berupa bilangan bulat dari 1 digit sampai seterusnya. Angka desimal ini mengartikan bahwa jika angka itu terletak 1 digit disebelah kanan tanda koma, maka nilainya dibagi dengan 10; jika terletak 2 digit disebelah kanan tanda koma, maka nilainya dibagi dengan 100; jika terletak 3 digit disebelah kanan tanda koma, maka nilainya dibagi dengan 1000; dan seterusnya. Jadi pembagiannya atau penyebutnya

adalah 10 dipangkatkan dengan jumlah digit disebelah kanan tanda koma.

Contoh :

$$0,3 = \frac{3}{10}; 0,08 = \frac{8}{100}; 0,021 = \frac{21}{1000}; 0,5676 = \frac{5676}{10.000};$$

dan seterusnya.

Angka-angka desimal dalam contoh di atas sering juga disebut dengan pecahan desimal. Dengan demikian, angka pecahan ada dua macam yaitu pecahan biasa dan pecahan desimal.

Selain jenis-jenis bilangan yang diuraikan pada gambar 1.1 di atas, terdapat tiga jenis bilangan yang menyangkut bilangan bulat positif diantaranya adalah bilangan cacah, bilangan asli dan bilangan prima. Bilangan cacah merupakan keseluruhan dari bilangan bulat positif ataupun nol yaitu $(0,1,2,3,4,5,...)$. Bilangan asli merupakan keseluruhan bilangan bulat positif tetapi tidak termasuk nol yaitu $(1,2,3,4,5,...)$ dan bilangan prima merupakan bilangan asli yang besarnya tidak sama dengan satu dan bilangan yang hanya habis dibagi dengan bilangan itu sendiri, yaitu $(2,3,5,7,11,...)$.

2. Operasi Bilangan

Operasi bilangan pada penjumlahan dan perkalian dapat menggunakan kaidah-kaidah sebagai berikut ini :

a. Kaidah Komutatif

Misalkan terdapat dua bilangan a dan b dijumlahkan maka perubahan urutan antara bilangan a dan b tidak mengubah hasil dari penjumlahan tersebut.

$$a + b = b + a$$

Misalkan $a = 2$ dan $b = 5$

Maka: $2 + 5 = 5 + 2$

$$7 = 7$$

Begitu juga dengan operasi perkalian, perubahan urutan perkalian antara dua bilangan a dan b tidak akan mengubah hasil dari perkalian kedua bilangan tersebut.

$$a \times b = b \times a$$

Misalkan $a = 2$ dan $b = 5$

Maka : $2 \times 5 = 5 \times 2$

$$10 = 10$$

b. Kaidah Asosiatif

Misalkan terdapat tiga bilangan a , b , dan c yang akan dijumlahkan maka perubahan cara pengelompokan bilangan-bilangan tersebut tidak akan mengubah hasil penjumlahan dari bilangan-bilangan tersebut.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Misalkan $a = 2$, $b = 5$, dan $c = 3$

Maka : $(2 + 5) + 3 = 2 + (5 + 3)$

$$7 + 3 = 2 + 8$$

$$10 = 10$$

Hal tersebut juga berlaku pada operasi perkalian, perubahan cara pengelompokan bilangan-bilangan tidak akan mengubah hasil perkalian dari bilangan-bilangan tersebut.

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Misalkan $a = 2$, $b = 5$, dan $c = 3$

Maka : $(2 \times 5) \times 3 = 2 \times (5 \times 3)$

$$10 \times 3 = 2 \times 15$$

$$30 = 30$$

c. Kaidah Pembatalan

Misalkan penjumlahan antara bilangan a dan bilangan c sama dengan penjumlahan bilangan b dan bilangan c , maka nilai a sama dengan nilai b

Jika	$a + c = b + c$
Maka	$a = b$

Apabila hasil kali bilangan a dan bilangan c sama dengan bilangan b dan bilangan c , dengan c merupakan bilangan nyata bukan-nol, maka a sama dengan b .

Jika	$a \times c = b \times c$	$c \neq 0$
Maka	$a = b$	

d. Kaidah Distributif

Dalam melakukan pengalian bilangan a terdapat jumlah $(b + c)$, yang hasilnya adalah sama dengan jumlah hasil kali $a \times b$ dan hasil kali $a \times c$. Dengan kata lain, hasil kali suatu bilangan terhadap penjumlahan adalah sama dengan jumlah hasil kali-asil kalinya.

$a(b + c) = ab + ac$

Misalkan $a = 2$, $b = 3$ dan $c = 5$

Maka : $2(3+5) = 2 \times 3 + 2 \times 5$

$$2 \times 8 = 6 + 10$$

$$16 = 16$$

e. Unsur Penyama

Unsur penyama dalam operasi penjumlahan atau pengurangan merupakan bilangan nol, karena jumlah atau selisih antara suatu bilangan tertentu dan nol adalah bilangan itu sendiri.

$$a \pm 0 = a$$

Misalkan $a = 3$

Maka : $3 \pm 0 = 3$

begitu juga dengan perkalian, unsur penyama pada operasi perkalian atau pembagian adalah bilangan satu, karena hasil perkalian atau hasil pembagian antara bilangan tertentu dan bilangan satu adalah bilangan itu sendiri

$$a \times 1 = a$$

$$a : 1 = a$$

Misalkan $a = 3$

Maka : $3 \times 1 = 3$ dan $3 : 1 = 3$

f. Kebalikan

Bilangan nyata dapat mempunyai sebuah balikan penambahan (*additive invers*), penjumlahan antara bilangan tertentu dan kebalikan penambahannya sama dengan bilangan nol

$$a + (-a) = 0$$

Misalkan $a = 3$

Maka: $3 + (-3) = 0$

Keterangan bahwa -3 disebut sebagai kebalikan penambah dari bilangan 3 atau bilangan negatif 3

Pada setiap bilangan nyata yang bukan bilangan nol memiliki sebuah kebalikan pengali (*multiplicative inverse*), hasil kali suatu bilangan terhadap kebalikan pengali merupakan sama dengan satu.

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

Misalkan $a = 3$

Maka : $3 \times \frac{1}{3} = 1$

Keterangan bahwa $\frac{1}{3}$ dinamakan kebalikan pengali dari bilangan 3

3. Operasi Tanda

a. Penjumlahan

- 1) Terdapat bilangan positif a dengan $a > 0$ dan bilangan positif b dengan $b > 0$. Sehingga apabila dijumlahkan akan menjadi c dengan $c > a$ dan juga $c > b$
- 2) Terdapat bilangan negatif a dengan $a < 0$ dan bilangan negatif b dengan $b < 0$. Maka apabila dijumlahkan menjadi c dengan $c < a$ dan $c < b$.
- 3) Terdapat bilangan positif a dengan $a > 0$ dan bilangan negatif b dengan $b < 0$, maka apabila dijumlahkan akan menjadi c dengan $c > 0$ jika $|a| > |b|$ atau menjadi d dengan $d > 0$ jika $|a| < |b|$.
- 4) Terdapat bilangan negatif a dengan $a < 0$ dan bilangan positif b dengan $b > 0$ maka jika dijumlahkan akan menjadi bilangan positif c dengan $c > 0$ apabila $|a| < |b|$, atau menjadi d dengan $d < 0$ apabila $|a| > |b|$

b. Pengurangan

- 1) Terdapat bilangan positif a dengan $a > 0$ dan bilangan positif b dengan $b > 0$ maka selisih antara a dan b adalah bilangan positif c dengan

$c > 0$ jika $|a| > |b|$, atau bilangan negatif d dengan $d < 0$ jika $|a| < |b|$.

- 2) Terdapat bilangan negatif a dengan $a < 0$ dan bilangan negatif b dengan $b < 0$ maka selisih antara a dan b adalah bilangan positif c dengan $c > 0$ jika $|a| < |b|$ atau bilangan negatif d dengan $d < 0$ jika $|a| > |b|$.
- 3) Terdapat bilangan positif a dengan $a > 0$ dan bilangan negatif b dengan $b < 0$ maka selisih antara a dan b adalah bilangan positif c dengan $c > 0$ (hal ini identik dengan penjumlahan dua bilangan positif)
- 4) Terdapat bilangan negatif a dengan $a < 0$ dan bilangan positif b dengan $b > 0$ maka selisih antara a dan b adalah bilangan negatif c dengan $c < 0$ (hal ini identik dengan penjumlahan dua bilangan negatif)

c. Perkalian

- 1) Terdapat bilangan positif a dan b dimana $a, b > 0$ dan bilangan negatif a dan b dengan $a, b < 0$ maka perkalian antara a dan b adalah bilangan positif c dengan $c > 0$.
- 2) Terdapat bilangan positif a dimana $a > 0$ dan bilangan negatif b dengan $b < 0$ maka perkalian antara a dan b atau sebaliknya adalah bilangan negatif c dengan $c < 0$.

d. Pembagian

- 1) Terdapat bilangan positif a dan b dimana $a, b > 0$ dan bilangan negatif a dan b dimana $a, b < 0$ maka pembagian antara a dan b adalah bilangan positif c dengan $c > 0$.
- 2) Terdapat bilangan positif a dimana $a > 0$ dan bilangan negatif b dimana $b < 0$ maka pembagian antara a dan b atau sebaliknya adalah bilangan negatif c dengan $c < 0$.

4. Operasi Bilangan Pecahan

Jika a dan b bilangan bulat, $b \neq 0$ maka terdapat sebuah bilangan $\frac{a}{b} = a \frac{1}{b}$ yang disebut hasil bagi dari a oleh b . Bilangan a disebut sebagai pembilang dan b disebut penyebut. Kalau $\frac{a}{b}$ bukan suatu bilangan bulat maka $\frac{a}{b}$ disebut bilangan pecahan. Berikut ini merupakan operasi-operasi bilangan pecahan :

a. Operasi Pemadanan

Bilangan pecahan dapat diperbesar atau diperkecil tanpa mengubah nilai pecahannya, sepanjang keduanya (pembilang dan penyebut) dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

Atau

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

Contoh :

Sederhanakan bentuk pecahan-pecahan di bawah ini:

a. $\frac{9}{27}$

b. $\frac{5}{125}$

Penyelesaian :

a. $\frac{9}{27} = \frac{9:9}{27:9} = \frac{1}{3}$

b. $\frac{5}{125} = \frac{5:5}{125:5} = \frac{1}{25}$

b. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan

Syarat kedua bilangan pecahan dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila mempunyai penyebut yang sama. Jika terdapat dua bilangan pecahan yang mempunyai penyebut tidak sama maka harus disamakan terlebih dahulu menggunakan rumus KPK (faktor persekutuan terkecil)

Contoh :

a. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$$\text{b. } \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\text{c. } \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} = \frac{8+2-9}{12} = \frac{1}{12}$$

c. Operasi Perkalian

Perkalian dua bilangan pecahan dilakukan dengan cara mengalikan suku-suku sejenis, bilangan pecahan terdiri dari pembilang dan penyebut, sehingga perkalian pecahan diperoleh dari pembilang dikalikan dengan pembilang dan penyebut dikalikan dengan penyebut. Apabila terdapat pecahan campuran diubah terlebih dahulu menjadi bilangan pecahan biasa sehingga mempunyai bilangan pembilang dan penyebut.

Contoh :

$$\text{a. } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

$$\text{b. } \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\text{c. } 5\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{2} = \frac{21}{4} \times \frac{7}{2} = \frac{147}{8} = 18\frac{3}{8}$$

d. Operasi Pembagian

Operasi pembagian antara dua bilangan pecahan dilakukan dengan mengkalikan bilangan

pecahan terbagi (bilangan pecahan yang akan dibagi)
dengan kebalikan dari bilangan pecahan pembagi.

Contoh :

a. $\frac{2}{3} : \frac{5}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{5} = \frac{16}{15}$

b. $5\frac{1}{4} : 3\frac{1}{2} = \frac{21}{4} : \frac{7}{2} = \frac{21}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{42}{28}$

C. Latihan

1. Ubahlah angka-angka pecahan biasa berikut ini kedalam bentuk pecahan desimal!

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{9}$

c. $\frac{1}{10}$

d. $\frac{71}{100}$

2. Tentukan nilai dari penjumlahan pecahan di bawah ini !

a. $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} =$

b. $\frac{1}{6} + \frac{3}{8} =$

c. $\frac{3}{7} + \frac{2}{12} + \frac{1}{8} =$

$$d. \frac{5}{14} + \frac{2}{15} + \frac{1}{6} =$$

3. Tentukan nilai dari pengurangan pecahan di bawah ini :

$$a. \frac{1}{3} - \frac{2}{5} =$$

$$b. \frac{3}{8} - \frac{3}{20} =$$

$$c. \frac{3}{7} - \frac{5}{12} - \frac{5}{6} =$$

$$d. \frac{2}{11} - \frac{5}{21} - \frac{3}{8} =$$

4. Tentukan nilai dari perkalian pecahan di bawah ini :

$$a. \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} =$$

$$b. \frac{1}{6} \times \frac{3}{8} =$$

$$c. \frac{3}{7} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{6} =$$

$$d. \frac{2}{11} \times \frac{5}{21} \times \frac{3}{8} =$$

5. Tentukan nilai dari pembagian pecahan di bawah ini :

$$a. \frac{1}{3} : \frac{2}{5} =$$

$$b. \frac{3}{8} : \frac{3}{20} =$$

$$c. \frac{3}{7} : \frac{2}{12} : \frac{1}{8} =$$

d. $\frac{5}{14} : \frac{2}{15} : \frac{1}{6} =$

6. Dari 6 karyawan yang lulus masa percobaan, 3 diantaranya akan ditempatkan dibagian pemasaran. Berapa susunan cara yang dapat dibentuk?
7. Dari 15 kupon undian akan diambil dua kupon untuk menentukan juara pertama dan kedua. Tentukan berapa cara untuk menentukan dua kupon tersebut!
8. Dari 7 pria dan wanita, akan dipilih 4 pria dan 2 wanita untuk dijadikan pengurus suatu organisasi. Bila 2 pria dan wanita pasti dipilih maka banyaknya susunan pengurus yang mungkin dibentuk adalah

D. Referensi

- Dumairy. 2010. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta : BPFE.
- Kalangi, Josep Bintang. 2012. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta : Salemba Empat.
- Yusuf Yahya, Dkk. 2001. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta : Ghalia Indonesia.

PERTEMUAN II

HIMPUNAN

A. Capaian Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini, diharapkan mahasiswa mampu:

1. menganalisis konsep himpunan
2. menghitung himpunan dengan operasi himpunan
3. menggambar diagram venn serta,
4. mengaplikasikan konsep himpunan kedalam kehidupan sehari-hari.

B. Materi

1. Definisi dan Notasi Himpunan

Dalam kehidupan sehari-hari tentunya kita sering melihat suatu segerombolan atau kelompok benda atau objek. Seperti halnya pada gambar di bawah ini :



Gambar 2. 1 Sekumpulan buah apel



Gambar 2. 2 Segerombolan Kucing



Gambar 2. 3 Sekelompok binatang karnivora



Gambar 2. 4 Sekelompok planet dalam tata surya

Istilah sekelompok, sekumpulan ataupun segerombolan dapat diartikan sebagai himpunan apabila dapat didefinisikan dengan jelas yang dapat ditentukan

dengan pasti, tegas mengenai benda apa saja yang termasuk dan tidak termasuk dalam suatu himpunan tersebut. Akan tetapi sekelompok, sekumpulan ataupun segerombolan tidak dapat dikatakan sebuah himpunan apabila tidak bisa didefinisikan dengan jelas contohnya “sekumpulan mahasiswa berbadan tinggi di kelas 01SMJP001”. Contoh tersebut bukan merupakan himpunan karena “badan tinggi” tidak bisa didefinisikan dengan jelas, badan tinggi menurut orang memiliki definisi yang berbeda-beda. Sehingga dapat disimpulkan bahwa himpunan adalah sekumpulan objek-objek yang mempunyai makna yang jelas.

Notasi himpunan dilambangkan dengan huruf kapital misalkan $A, B, C, D, \dots, Z$. Kemudian objek yang termasuk di dalam himpunan dituliskan dalam kurung kurawal $\{ \}$. Sedangkan terdapat tiga cara dalam menyajikan suatu himpunan yaitu dinyatakan dengan kalimat atau kata-kata; mendaftar anggota himpunannya dan dengan menggunakan notasi pembentuk himpunan.

a. Menyatakan himpunan dengan menggunakan kata-kata

Dalam menyatakan himpunan dapat dilakukan dengan menyebutkan syarat atau sifat keanggotaannya.

Contoh :

A adalah himpunan bilangan genap kurang dari 10

B adalah himpunan nama – nama hari

C adalah himpunan bilangan prima kurang dari 10

- b. Menyatakan himpunan dengan mendaftar anggotanya
Dalam menyatakan himpunan dapat dilakukan dengan mendaftar anggota-anggotanya

Contoh :

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{\text{senin, selas, rabu, kamis, jumat, sabtu, minggu}\}$$

$$C = \{2, 3, 5, 7\}$$

- c. Menyatakan himpunan dengan notasi pembentuk himpunan
Dalam menyatakan himpunan dengan notasi pembentuk himpunan

Contoh :

$$A = \{x | x \text{ bilangan cacah kurang dari } 10\}$$

$$B = \{x | x < 10, x \text{ anggota bilangan cacah}\}$$

$$C = \{x | 2 \leq x \leq 10, x \text{ bilangan asli}\}$$

2. Jenis-Jenis Himpunan

Beberapa jenis-jenis himpunan yang perlu diketahui, diantaranya adalah :

- a. Himpunan Semesta

Himpunan semesta adalah sekelompok objek yang sedang dibicarakan, himpunan semesta dinotasikan dalam bentuk S atau dapat juga dilambangkan dengan U .

Contoh :

jika A adalah pisang, apel, anggur, dan jeruk. Maka himpunan semesta dari himpunan tersebut merupakan buah-buahan atau $S = \{buah - buahan\}$.

Jika $B = \{kambing, sapi, kuda, keledai\}$, maka himpunan semesta dari himpunan B adalah hewan atau $S = \{hewan\}$. Dengan demikian S adalah himpunan semesta dari A dan B yang memuat semua anggota dari A dan B .

b. Himpunan kosong

Himpunan kosong merupakan sekelompok objek yang tidak mempunyai anggota atau elemen himpunan. Notasi himpunan semesta adalah $\{ \}$ atau $\emptyset$

Contoh :

Jika kelas 01SMJP002 merupakan himpunan mahasiswa yang berasal dari Tangerang Selatan, maka jika ditanyakan kelas 01SMJP002 yang berasal dari semarang maka bisa dinyatakan dengan notasi $\{ \}$ atau $\emptyset$, karena tidak ada mahasiswa kelas 01SMJP002 yang berasal dari semarang.

c. Himpunan nol

Himpunan nol adalah himpunan yang beranggotakan 1 anggota yaitu bilangan nol (0).

Contoh :

Jika $A = \{x | x < 1, x \text{ anggota bilangan cacah}\}$, maka $A = \{0\}$ dengan anggota himpunan A adalah 0 dengan banyak anggota 1 atau $n(A) = 1$ sehingga himpunan

A bukan merupakan himpunan kosong karena mempunyai anggota yaitu bilangan nol (0)

d. Himpunan berhingga

Himpunan berhingga adalah himpunan dengan jumlah anggotanya terbatas.

Contoh :

Jika suatu himpunan dinyatakan dengan mendaftar anggota-anggotanya, maka dapat menentukan banyaknya anggota himpunan tersebut. Misalkan A adalah himpunan bilangan prima kurang dari 10 maka $A = \{2, 3, 5, 7\}$ dengan banyaknya anggota himpunan A adalah 6 atau A dan $n(A) = 6$ sehingga himpunan A dikatakan himpunan berhingga

e. Himpunan tak berhingga

Himpunan tak berhingga adalah himpunan dengan banyak anggotanya tak terbatas.

Contoh :

Jika A adalah anggota bilangan asli yang habis dibagi 2. Maka $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ dengan demikian banyaknya anggota himpunan A tidak berhingga atau $n(A) = \infty$.

3. Diagram Venn

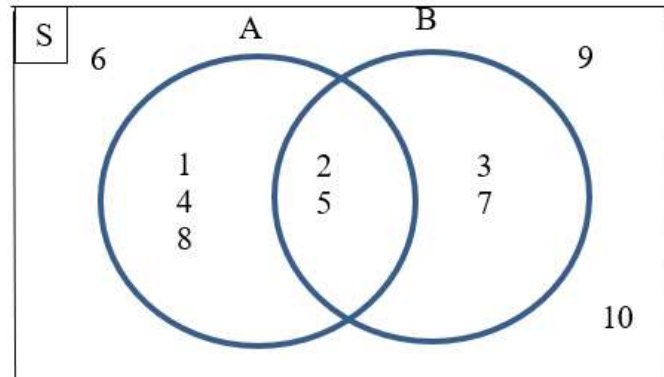
Diagram venn adalah diagram yang berbentuk persegi panjang yang di dalamnya terdapat gambar lingkaran yang merupakan anggota himpunan yang sedang dibicarakan. Dalam diagram venn daerah

himpunan semesta dinyatakan dengan daerah persegi Panjang, sedangkan himpunan lain dalam semesta pembicaraan dinyatakan dengan gambar lingkaran yang didalamnya terdapat anggota-anggota dari diagram itu sendiri.

Contoh :

Diketahui $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 4, 5, 8\}$ dan $B = \{2, 3, 5, 7\}$. Dari himpunan-himpunan tersebut nyatakan dalam bentuk diagram venn!

Penyelesaian :



4. Operasi Himpunan

Terdapat 4 operasi pada himpunan, diantaranya adalah irisan, gabungan, selisih dan komplemen.

a. Irisan Dua Himpunan

Irisan dua himpunan adalah himpunan yang anggotanya diambil dari persekutuan dua himpunan tersebut, atau diambil dari bilangan yang sama dari kedua himpunan tersebut. Jika terdapat dua himpunan

A dan himpunan B , maka untuk menentukan irisannya dapat diambil dari bilangan yang sama antara anggota himpunan A dan himpunan B . Sehingga bisa dikatakan irisan himpunan A dan B adalah himpunan anggota himpunan A yang juga menjadi anggota himpunan B . Notasi irisan dari himpunan A dan himpunan B dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

Apabila digambarkan dalam diagram venn maka irisan dari dua himpunan dapat digambarkan sebagai berikut:

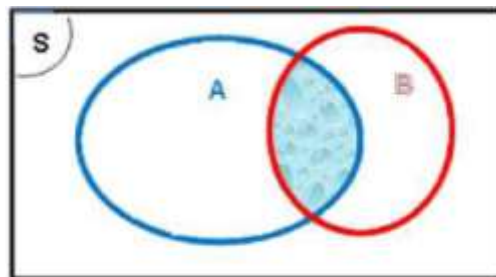


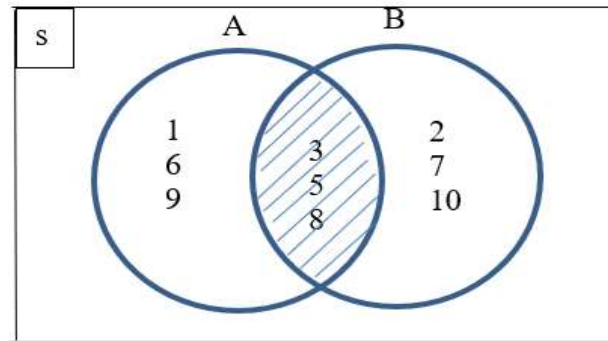
Diagram Venn $A \cap B$

Berdasarkan gambar diagram venn di atas terlihat bahwa warna biru yang terletak diantara himpunan A dan himpunan B merupakan area irisan dari dua himpunan tersebut.

Contoh :

Diketahui $A = \{1, 3, 5, 6, 8, 9\}$ dan $B = \{2, 3, 5, 7, 8, 10\}$ maka jika ditanyakan $A \cap B = \{3, 5, 8\}$. Berdasarkan

himpunan A dan himpunan B yang diketahui tersebut maka bisa Digambar diagram vennnya sebagai berikut:



Terdapat beberapa sifat irisan dari dua himpunan, diantaranya adalah :

- 1) Himpunan yang satu adalah himpunan bagian dari himpunan yang lain.

Contoh :

$A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$ maka $A \cap B = \{a, b, c\}$

- 2) Himpunan yang satu sama dengan himpunan yang lain.

Contoh :

$A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{c, b, a\}$ maka $A \cap B = A = B = \{a, b, c\}$

- 3) Himpunan yang satu berbeda dengan himpunan lainnya atau himpunan saling lepas atau saling asing

Contoh :

$A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{d, e, f, g\}$ maka $A \cap B = \{\} / \emptyset$

b. Gabungan dua himpunan

Gabungan dua himpunan adalah himpunan yang anggotanya diambil dari gabungan dari dua himpunan tersebut. Jika terdapat dua himpunan A dan himpunan B , maka untuk menentukan gabungan dari dua himpunan tersebut diambil dari gabungan antara himpunan A dan himpunan B . Sehingga gabungan himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya terdiri atas anggota-anggota A atau anggota-anggota B . Gabungan dua himpunan dapat dinotasikan sebagai berikut :

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

Apabila digambarkan dengan diagram venn maka gabungan dari dua himpunan dapat dinyatakan sebagai berikut :

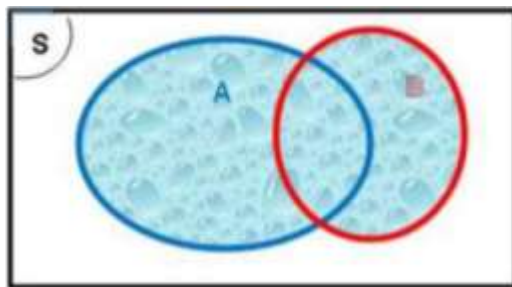


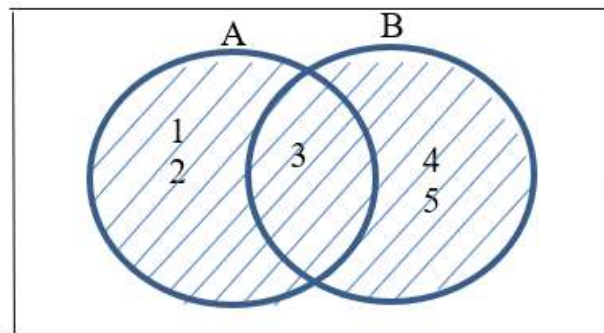
Diagram Venn $A \cup B$

Berdasarkan gambar diagram venn di atas terlihat bahwa warna biru memenuhi daerah pada himpunan A dan himpunan B . Hal tersebut merupakan

daerah gabungan antara himpunan A dan himpunan B .

Contoh :

Diketahui $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{3,4,5\}$ maka $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$. Berdasarkan himpunan A dan himpunan B yang diketahui tersebut maka bisa digambar diagram vennya sebagai berikut :



Terdapat beberapa sifat pada operasi gabungan dua himpunan, yaitu sebagai berikut :

- 1) Himpunan yang satu adalah himpunan bagian dari himpunan yang lain

Contoh :

Diketahui $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$ maka $A \cup B = B = \{a, b, c, d, e\}$

- 2) Himpunan yang satu sama dengan himpunan yang lainnya.

Contoh :

Diketahui $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$ maka $A \cup B = A = B = \{a, b, c, d\}$

- 3) Himpunan yang satu dengan himpunan lain saling lepas

Contoh :

Diketahui $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{d, e, f\}$ maka $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

Banyaknya anggota dari gabungan dua himpunan dapat dirumuskan dengan :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Contoh :

Diketahui

$A = \{\text{bilangan prima kurang dari } 10\}$

$B = \{\text{bilangan gankil kurang dari } 10\}$

Tentukan

- 1) $A \cap B$
- 2) $A \cup B$
- 3) $n(A \cup B)$

Penyelesaian :

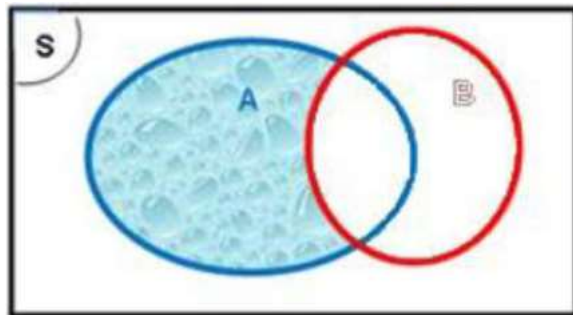
- 1) $A = \{2, 3, 5, 7\}$ maka $n(A) = 4$
 $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ maka $n(B) = 5$
 $A \cap B = \{3, 5, 7\}$ maka $n(A \cap B) = 3$
- 2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ maka $n(A \cup B) = 6$
- 3) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 5 - 3 = 6$

c. Selisih Dua Himpunan

misalkan terdapat himpunan A dan himpunan B adalah semua anggota himpunan A tetapi bukan merupakan anggota himpunan B . Notasi selisih himpunan A dan himpunan B dapat dinyatakan dengan $A - B$. $A - B$ dapat dibaca selisih A dan B . Selisish dua himpunan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

Jika digambar dengan menggunakan diagram venn selisih dua himpunan akan berbentuk seperti berikut :



(a) Diagram Venn $A - B$

Contoh :

Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$
tentukan $A - B$!

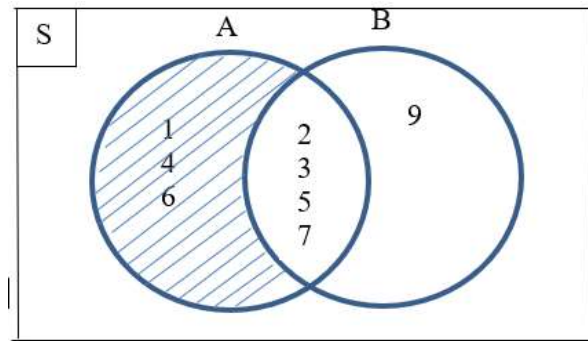
Penyelesaian :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$$

$$A - B = \{1, 4, 6\}$$

Jika Digambar dengan diagram venn maka akan berbentuk seperti berikut :



d. Komplemen

Komplemen himpunan A dapat disimbolkan dengan A^c atau A' yang dapat didefinisikan suatu himpunan yang beranggotakan himpunan semesta (S) tetapi bukan merupakan anggota himpunan A . Dengan demikian notasi pembentuk komplemen dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$A^c = A' = \{x | x \in S, x \notin A\}$$

Jika digambarkan dengan diagram venn, maka komplemen akan berbentuk seperti berikut ini :

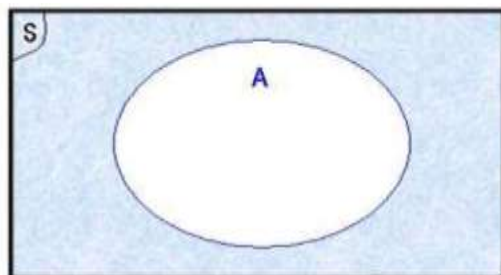
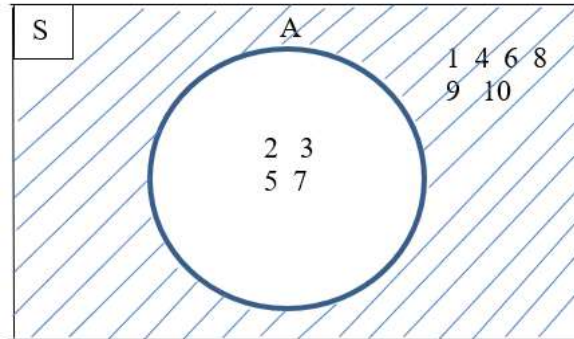


Diagram Venn A'

Contoh :

Diketahui $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ dan $A = \{2, 3, 5, 7\}$ tentukan anggota dari A' !

Penyelesaian :



5. Sifat-Sifat Operasi Himpunan

a. Sifat-sifat Irisan Dua Himpunan

1) Sifat Komutatif

$$A \cap B = B \cap A$$

2) Sifat Idempoten

$$A \cap A = A$$

3) Sifat Asosiatif

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

4) Sifat Identitas

$$A \cap S = A$$

5) Sifat Komplemen

$$A \cap A^c = \emptyset$$

b. Sifat-sifat Gabungan Dua Himpunan

1) Sifat Komutatif

$$A \cup B = B \cup A$$

2) Sifat Idempoten

$$A \cup A = A$$

3) Sifat Asosiatif

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

4) Sifat Identitas

$$A \cup \emptyset = A$$

5) Sifat Komplemen

$$A \cup A^c = S$$

6) Sifat Distributif Irisan terhadap Gabungan

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

7) Sifat Distributif Gabungan Terhadap Irisan

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

c. Sifat-Sifat Selisih Dua Himpunan

1) Sifat Identitas

$$A - \emptyset = A$$

2) Sifat Distributif Selisih terhadap Irisan

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

3) Sifat Distributif Selisih Terhadap Gabungan

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

6. Penerapan Himpunan

Contoh :

Setelah dilakukan survey kepada 50 mahasiswa Prodi Manajemen S-1 didapat bahwa terdapat 30 mahasiswa yang gemar dengan mata kuliah Bahasa Indonesia, 25 mahasiswa yang gemar dengan mata kuliah Bahasa Inggris, sedangkan 10 mahasiswa yang gemar dengan mata kuliah Bahasa Inggris dan Bahasa

Indonesia. Tentukan berapa banyak mahasiswa yang tidak gemar keduanya!

Penyelesaian :

Misalkan :

A = mahasiswa yang gemar Bahasa Indonesia

B = mahasiswa yang gemar Bahasa Inggris

Maka

$$n(A) = 30$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 10$$

Tentukan $n(A \cup B)^c$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = 30 + 25 - 10 = 45$$

Sehingga

$$n(A \cup B)^c = n(S) - n(A \cup B)$$

$$n(A \cup B)^c = 50 - 45 = 5$$

Jadi banyak mahasiswa yang tidak gemar Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris adalah 5

C. Latihan

1. Diketahui :

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$C = \{1, 3, 10\}$$

Tentukan :

- a. $A \cup B \cup C$
- b. $(A \cup B) \cap C$
- c. $(A - C) \cup B$
- d. $(A^c \cap B) - C$
- e. $(A \cap B)^c \cup (A \cup B)$

2. Diketahui

$$A = \{x | 2 < x \leq 10, x \in \text{bilangan asli}\}$$

$$B = \{x | x \leq 10, x \in \text{bilangan genap}\}$$

$$C = \{x | 2 \leq x \leq 15, x \in \text{bilangan prima}\}$$

Tentukan anggota dari :

- a. A, B dan C
- b. $A \cup B$ dan $n(A \cup B)$
- c. $A \cup C$ dan $n(A \cup C)$
- d. $B \cup C$ dan $n(B \cup C)$
- e. $A \cup B \cup C$ dan $n(A \cup B \cup C)$

3. Diketahui

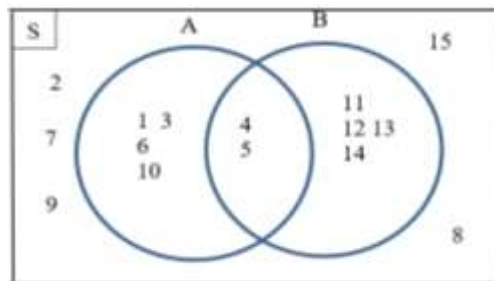
$$S = \{x | x \leq 12, x \in \text{bilangan cacah}\}$$

$$P = \{x | 2 \leq x \leq 10, x \in S\}$$

$$Q = \{x | x > 4, x \in S\}$$

Gambarlah diagram venn yang menggambarkan hubungan antara himpunan S, P & Q !

4. Diketahui diagram venn berikut ini :



Berdasarkan diagram venn di atas, tentukan anggota himpunan dari $S, A, B, A \cap B, A^c$ dan B^c !

5. Setelah dilakukan survey kepada 65 masyarakat pada suatu desa didapat bahwa terdapat 30 orang yang gemar menanam padi, 20 orang gemar menanam kacang hijau, sedangkan 11 orang yang gemar menanam keduanya. Tentukan berapa banyak orang yang tidak gemar menanam keduanya!

D. Referensi

- Amir Tjolleng. 2019. *Matematika Ekonomi*. Bandung : Yrama Widya
- Dumairy. 2010. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta : BPFE.
- Kalangi, Josep Bintang. 2012. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta : Salemba Empat.
- Yusuf Yahya, Dkk. 2001. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta : Ghalia Indonesia.

PERTEMUAN III

PANGKAT AKAR DAN LOGARITMA

A. Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini diharapkan mahasiswa mampu :

1. Mendeskripsikan pangkat, akar dan logaritma
2. Mengidentifikasi pangkat, akar dan logaritma
3. Menyebutkan kaidah-kaidah yang berlaku dalam bentuk pangkat, akar dan logaritma
4. Menggunakan kaidah-kaidah bentuk pangkat, akar dan logaritma untuk menyelesaikan soal-soal

B. Materi

1. Pangkat

Pangkat dari sebuah bilangan ialah suatu indeks yang menunjukkan banyaknya perkalian bilangan yang sama secara beruntun. Notasi X^a berarti bahwa x harus dikalikan dengan x itu sendiri secara berturut-turut sebanyak a kali. Notasi pemangkatan sangat berfaedah untuk merumuskan penulisan bentuk perkalian secara ringkas. Sebagai contoh: perkalian bilangan 7 sebanyak 5 kali tak perlu dituliskan dengan lengkap $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$, melainkan cukup diringkas menjadi 7^5 . Jadi,

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5.$$

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^7$$

$$0,3 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,3 = 0,3^6$$

Notasi pemangkatan berfaedah pula untuk meringkas bilangan-bilangan kelipatan perkalian-sepuluh yang nilainya sangat besar atau sangat kecil. Sebagai contoh: bilangan 100.000 dapat diringkas menjadi 10^5 ; bilangan $1/100.000$ atau 0,00001 dapat diringkas menjadi 10^{-5} . Begitu pula,

$$1.000.000.000 = 10^9$$

$$5.000.000.000 = 5 \cdot 10^9$$

$$7.500.000.000 = 7,5 \cdot 10^9 \text{ atau } 75 \cdot 10^8$$

$$0,000.000.001 = 10^{-9}$$

$$0,000.000.034 = 34 \cdot 10^{-9} \text{ atau } 3,4 \cdot 10^{-8}$$

Pemangkatan sebuah bilangan dan pengoperasian bilangan-bilangan berpangkat mematuhi kaidah-kaidah tertentu. Berdasarkan kaidah-kaidah yang segera akan dipaparkan berikut ini, kita dapat pula memetik berbagai faedah lain dari notasi pemangkatan.

Kaidah Pemangkatan Bilangan

1. Bilangan bukan nol berpangkat nol adalah satu.

$X^0 = 1 \quad (x \neq 0)$

Contoh:

a. 3^0

b. $x^0 y^0$

$$c. x^0 y^0 z^0$$

Jawab :

$$a. 3^0 = 1$$

$$b. x^0 y^0 = 1.1 = 1$$

$$c. x^0 y^0 z^0 = 1.1.1 = 1$$

2. Bilangan berpangkat satu adalah bilangan itu sendiri.

$$X^1 = x$$

Contoh :

$$a. 3^1$$

$$b. \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$c. (xy)^1$$

Jawab :

$$a. 3^1 = 3$$

$$b. \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$c. (xy)^1 = xy$$

3. Nol berpangkat sebuah bilangan adalah tetap nol.

$$0^x = 0$$

Contoh :

$$a. 0^3$$

b. 0^5

c. $0^{\frac{1}{2}}$

Jawab :

a. $0^3 = 0$

b. $0^5 = 0$

c. $0^{\frac{1}{2}} = 0$

4. Bilangan berpangkat negatif adalah balikan pengali (*multiplicative inverse*) dari bilangan itu sendiri.

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

Contoh :

a. 3^{-2}

b. x^{-2}

c. $x^{-1}y^{-2}z^{-3}$

Jawab :

a. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

b. $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

c. $x^{-1}y^{-2}z^{-3} = \frac{1}{xy^2z^3}$

5. Bilangan berpangkat pecahan adalah akar dari bilangan itu sendiri, dengan suku pembagi dalam

pecahan menjadi pangkat dari akarnya sedangkan suku terbagi menjadi pangkat dari bilangan yang bersangkutan.

$$X^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$$

Contoh:

a. $3^{\frac{2}{5}}$

b. $x^{\frac{2}{3}}$

c. $5^{\frac{1}{2}}$

Jawab :

a. $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$

b. $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

c. $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

6. Bilangan pecahan berpangkat adalah hasil bagi suku-suku berpangkatnya.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

Contoh :

a. $\left(\frac{3}{2}\right)^2$

b. $\left(\frac{x}{y}\right)^3$

$$c. \left(\frac{2x}{3y} \right)^3$$

Jawab :

$$a. \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

$$b. \left(\frac{x}{y} \right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$$

$$c. \left(\frac{2x}{3y} \right)^3 = \frac{2^3 x^3}{3^3 y^3} = \frac{8x^3}{27y^3}$$

7. Bilangan berpangkat dipangkatkan lagi adalah bilangan berpangkat hasil kali pangkat-pangkatnya.

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

Contoh :

$$a. (3^2)^4$$

$$b. (3^{2b})^3$$

$$c. (2x^3)^2$$

Jawab :

$$a. (3^2)^4 = 3^8 = 6561$$

$$b. (3^{2b})^3 = 3^{6b}$$

$$c. (2x^3)^2 = 6x^6$$

8. Bilangan dipangkatkan pangkat-berpangkat adalah bilangan berpangkat hasil pemangkat pangkatnya.

$$x^{ab} = x^c$$

Dimana $c = a^b$

Contoh :

a. $3^{(2)(4)}$

b. $2^{(2)(3)}$

c. $2^{(3)(2)}$

Jawab :

a. $3^{(2)(4)} = 3^{2^4} = 3^{16} = 43045721$

b. $2^{(2)(3)} = 2^{2^3} = 2^8 = 6561$

c. $2^{(3)(2)} = 2^{3^2} = 2^9 = 512$

9. Hasil kali bilangan-bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat jumlah pangkat-pangkatnya.

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

Contoh :

a. $3^2 \cdot 3^3$

b. $x^2 \cdot x^3$

c. $2^2 \cdot 2^4$

Jawab :

a. $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$

b. $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$

$$c. 2^2 \cdot 2^4 = 2^{2+4} = 2^6 = 64$$

10. Hasil kali bilangan-bilangan berpangkat yang pangkatnya sama, tetapi basisnya berbeda, adalah perkalian basis-basisnya dalam pangkat yang bersangkutan.

$$x^a \cdot y^a = xy^a$$

Contoh :

$$a. x^2 \cdot y^2$$

$$b. 2^3 \cdot 3^3$$

$$c. 4^3 \cdot 1^3$$

Jawab :

$$a. x^2 \cdot y^2 = (xy)^2$$

$$b. 2^3 \cdot 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3 = 216$$

$$c. 4^3 \cdot 1^3 = (4 \times 1)^3 = 4^3 = 64$$

11. Hasil bagi bilangan-bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat selisih pangkat-pangkatnya

$$x^a : x^b = x^{a-b}$$

Contoh :

$$a. \frac{3^2}{3^3}$$

$$b. \frac{x^2}{x^3}$$

$$c. \frac{2^2}{2^4}$$

Jawab :

$$a. \frac{3^2}{3^3} = 3^{2-3} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$b. \frac{x^2}{x^3} = x^{2-3} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$c. \frac{2^2}{2^4} = 2^{2-4} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

12. Hasil bagi bilangan-bilangan berpangkat yang pangkatnya sama tetapi basisnya berbeda adalah pembagian basis-basisnya dalam pangkat yang bersangkutan

$$x^a : y^a = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

Contoh :

$$a. \frac{x^2}{y^2}$$

$$b. \frac{1^3}{3^3}$$

$$c. \frac{2^3}{3^3}$$

Jawab :

$$\text{a. } \frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

$$\text{b. } \frac{1^3}{3^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$\text{c. } \frac{2^3}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

2. Akar

Bentuk akar adalah akar dari bilangan rasional yang hasilnya merupakan bilangan irasional. Beberapa contoh bilangan irasional dalam bentuk akar adalah $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{10}$, dan lain sebagainya. Akan tetapi ada beberapa bilangan yang dituliskan dengan tanda akar akan tetapi bukan merupakan bentuk akar. Contohnya adalah $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{100} = 10$, dan lain sebagainya.

Akar juga merupakan bentuk lain untuk menyatakan bilangan perpangkatan. Akar dari sebuah bilangan adalah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya. Berdasarkan konsep perpangkatan kita mengetahui bahwa jika bilangan-bilangan yang sama misalnya x dikalikan sejumlah tertentu sebanyak a kali, maka dapat dituliskan menjadi x^a , x disebut basis dan a disebut pangkat.

Misalkan $x^a = m$, maka x dapat juga disebut sebagai akar pangkat a dari m yang jika dituliskan dalam bentuk akar menjadi $x = \sqrt[a]{m}$. Jadi, $\sqrt[a]{m} = x$ sebab $x^a = m$ atau dengan kata lain, $\sqrt[a]{m} = x$ jika $x^a = m$.

Ada beberapa kaidah bentuk pengakaran, berikut adalah kaidah-kaidah pengakaran bilangan

1. Akar dari sebuah bilangan adalah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya. Berdasarkan $\sqrt[a]{m} = x$ jika $x^a = m$ (x adalah basis), maka $\sqrt[b]{x} = x^{\frac{1}{b}}$ sebab $x^{(\frac{1}{b})b} = x^{\frac{b}{b}} = x^1 = x$ dalam hal ini $x^{\frac{1}{b}}$ adalah basis.

$$\sqrt[b]{x} = x^{\frac{1}{b}}$$

Contoh :

Ubahlah bentuk pangkat di bawah ini ke dalam bentuk perpangkatan!

- a. $\sqrt[3]{a}$
- b. $\sqrt[3]{64}$
- c. $\sqrt{b}$

Jawab :

- a. $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

$$\text{b. } \sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{c. } \sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$$

2. Akar dari sebuah bilangan perpangkatan adalah bilangan itu sendiri berpangkat pecahan, dengan pangkat dari bilangan bersangkutan menjadi suku terbagi sedangkan pangkat dari akar menjadi suku pembagi.

$$\boxed{\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}}$$

kaidah ini merupakan pengembangan dari kaidah nomor 1.

Contoh :

Ubahlah bentuk pangkat di bawah ini ke dalam bentuk perpangkatan!

$$\text{a. } \sqrt[3]{x}$$

$$\text{b. } \sqrt[3]{3^2}$$

$$\text{c. } \sqrt{5^3}$$

Jawab :

$$\text{a. } \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{b. } \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{c. } \sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$$

3. Akar dari perkalian bilangan adalah perkalian dari akar-akarnya.

$$\sqrt[b]{xy} = \sqrt[b]{x} \cdot \sqrt[b]{y}$$

Contoh :

a. $\sqrt{4x}$

b. $\sqrt[3]{21y}$

c. $\sqrt{50}$

Jawab :

a. $\sqrt{4x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$

b. $\sqrt[3]{27y} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{y} = 3 \cdot \sqrt[3]{y} = 3y^{\frac{1}{3}}$

c. $\sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

4. Akar dari sebuah bilangan pecahan adalah pembagian dari akar suku-sukunya.

$$\sqrt[b]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}}$$

Contoh :

a. $\sqrt[3]{\frac{8}{x}}$

b. $\sqrt{\frac{x}{64}}$

$$c. \sqrt{\frac{1}{9}}$$

Jawab :

$$a. \sqrt[3]{\frac{8}{x}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} = 2x^{-\frac{1}{3}}$$

$$b. \sqrt{\frac{x}{64}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{x}}{8} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{8}$$

$$c. \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

5. Jumlah atau selisih bilangan-bilangan terakar adalah jumlah atau selisih koefisien-koefisien terakar.

$$m\sqrt[b]{x^a} \pm n\sqrt[b]{x^a} = (m \pm n)\sqrt[b]{x^a}$$

Contoh :

$$a. 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$b. 4\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{27}$$

$$c. 2\sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{2}$$

Jawab :

$$a. 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (3 + 5 - 2)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$b. 4\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{27} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (4 - 2 + 3)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$c. 2\sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{2} = 2(5\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = (10 - 2 + 1)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

6. Hasil kali bilangan-bilangan terakar adalah akar dari hasil kali bilangan-bilangannya. Perkalian hanya dapat dilakukan apabila akar-akarnya berpangkat sama.

$$\sqrt[b]{x} \sqrt[b]{y} = \sqrt[b]{xy}$$

Contoh :

a. $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$

b. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

c. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$

Jawab :

a. $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = 6$

b. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$

c. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$

7. Hasil bagi bilangan-bilangan terakar adalah akar dari hasil bagi bilangan-bilangannya. Pembagian hanya dapat dilakukan apabila akar-akarnya berpangkat sama.

$$\frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[b]{\frac{x}{y}}$$

Contoh :

a. $\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{125}}$

$$b. \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}$$

$$c. \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}}$$

Jawab :

$$a. \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{125}} = \sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}$$

$$b. \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$c. \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

8. Akar ganda dari sebuah builangan adalah akar pangkat baru dari bilangan yang bersangkutan, pangkat baru akarnya adalah hasil kali pangkat dari

akar-akar sebelumnya. $\sqrt[b]{\sqrt[c]{\sqrt[d]{x^a}}} = x^{\frac{a}{bcd}}$

$$\boxed{\sqrt[b]{\sqrt[c]{\sqrt[d]{x^a}}} = x^{\frac{a}{bcd}}}$$

Contoh :

$$a. \sqrt{\sqrt{2}}$$

$$b. \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$c. \sqrt{\sqrt[3]{15625}}$$

Jawab :

a. $\sqrt{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2 \cdot 2}} = 2^{\frac{1}{4}}$

b. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^2}}} = x^{\frac{2}{3 \cdot 3 \cdot 3}} = x^{\frac{2}{27}}$

c. $\sqrt{\sqrt[3]{15625}} = \sqrt[6]{15625} = 5$

3. Logaritma

Logaritma dapat diartikan sebagai pangkat dari suatu bilangan pokok untuk menghasilkan suatu bilangan tertentu. Logaritma adalah invers dari perpangkatan, yaitu mencari pangkat dari suatu bilangan pokok sehingga hasilnya sesuai dengan yang telah diketahui. Misalkan a adalah bilangan positif ($a > 0$) dan g adalah bilangan positif yang tidak sama dengan 1 $0 < g < 1$ atau $g > 1$.

${}_g \log a = x$ jika hanya jika $g^x = a$. g disebut bilangan pokok atau basis logaritma dengan ketentuan $0 < g < 1$ atau $g > 1$ ($g > 0$) dan ($g \neq 1$). Jika $g = 10$ bilangan pokok ini biasanya tidak dituliskan. Dengan demikian $\log a$ berarti adalah ${}^{10}\log a$, $\log 24 = {}^{10}\log 24$, ${}^{10}\log 65$ dapat dituliskan menjadi $\log 65$ saja dan ${}^{10}\log 2$ ditulis $\log 2$ saja. Logaritma berbasis 10 disebut juga logaritma biasa (*common logarithm*) atau logaritma Briggs (berdasarkan nama penemunya, *Hendy Briggs*, 1561 – 1630). Di samping bilangan 10, basis lain yang

juga lazim dipakai dalam logaritma adalah bilangan e . Jika $g = e (e = 2,7128...)$ maka ${}^e \log a$ ditulis $\ln a$ (dibaca logaritma natural dari a) yaitu logaritma dengan bilangan pokok e . Logaritma berbasis e disebut juga logaritma alam (*natural logarithm*) atau logaritma Napier (*John Napier*, penemunya hidup antara tahun 1550 – 1617). Jika notasi logaritma Briggs dilambangkan dengan $\log$, maka logaritma Napier dilambangkan dengan $\ln$. Dengan demikian $\ln a$ berarti ${}^e \log a$, maka ${}^e \log 65$ dapat dituliskan menjadi $\ln 65$ saja. Kemudian a disebut numerus yaitu bilangan yang dicari logaritmanya, dengan ketentuan ($a > 0$). Sedangkan x disebut hasil dari logaritma, nilainya dapat positif, negatif atau nol. Bentuk $g^x = a$ dan ${}^g \log a = x$ merupakan dua pernyataan yang ekuivalen (setara) $g^x = a$ disebut bentuk eksponensial atau perpangkatan dan ${}^g \log a = x$ disebut bentuk logaritmik dalam hubungan itu.

Contoh :

- a. $8 = 2^3 \Rightarrow {}^2 \log 8 = 3$
- b. $25 = 5^2 \Rightarrow {}^5 \log 25 = 2$
- c. $\frac{1}{9} = 3^{-2} \Rightarrow {}^3 \log \frac{1}{9} = -2$
- d. $1 = e^0 \Rightarrow {}^e \log 1 = 0$
- e. $a = b^c \Rightarrow {}^b \log a = c$

Berikut ini merupakan kaidah-kaidah logaritma :

a.
$${}_x\log x = 1$$

sebab $x^1 = x$

Contoh :

1) ${}^{10}\log 10 = 1$

2) ${}^8\log 8 = 1$

3) ${}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{2} = 1$

b.
$${}_x\log 1 = 0$$

Contoh:

1) ${}^{10}\log 1 = 0$

2) ${}^8\log 1 = 0$

3) ${}^{\frac{1}{2}}\log 1 = 0$

c.
$${}_x\log x^a = a$$

Contoh:

1) ${}^{10}\log 10^2 = 2$

2) ${}^8\log 8^3 = 3$

3) ${}^2\log 8 = {}^2\log 2^3 = 3$

d.
$${}_x\log m^a = a \cdot {}_x\log m$$

Contoh :

1) ${}^{10}\log 100 = {}^{10}\log 10^2 = 2 \cdot {}^{10}\log 10 = 2 \times 1 = 2$

2) ${}^8\log 512^4 = 4 \cdot {}^8\log 8^3 = 4 \times 3 \cdot {}^8\log 8 = 12 \times 1 = 12$

$$3) \quad {}^3\log 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log 3^2 = \frac{1}{2} \times 2 \cdot {}^3\log 3 = 1 \times 1 = 1$$

e.

$${}_x^b \log m^a = \frac{a}{b} {}_x \log m$$

Contoh :

$$1) \quad {}^{25}\log 75 = {}^{5^2}\log 5^3 = \frac{3}{2} {}^5\log 5 = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

$$2) \quad {}^{\sqrt{2}}\log 16 = {}^{2^{\frac{1}{2}}}\log 2^4 = \frac{4}{\frac{1}{2}} {}^2\log 2 = 8 \times 1 = 8$$

$$3) \quad {}^{\frac{1}{2}}\log \sqrt{8} = {}^{2^{-1}}\log 2^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{-1} {}^2\log 2 = -\frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2}$$

f.

$${}_x\log m n = {}_x\log m + {}_x\log n$$

Contoh :

$$1) \quad {}^{10}\log (100)(1000) = {}^{10}\log 100 + {}^{10}\log 1000 = 2 + 3 = 5$$

$$2) \quad {}^3\log (243)(27) = {}^3\log 243 + {}^3\log 27 = 5 + 3 = 8$$

$$3) \quad {}^2\log (16)(4) = {}^2\log 16 + {}^2\log 4 = 4 + 2 = 6$$

g.

$${}_x\log \frac{m}{n} = {}_x\log m - {}_x\log n$$

Contoh :

$$1. \quad {}^{10}\log \frac{100}{1000} = {}^{10}\log 100 - {}^{10}\log 1000 = 2 - 3 = -1$$

$$2. \quad {}^3\log \frac{243}{27} = {}^3\log 243 - {}^3\log 27 = 5 - 3 = 2$$

$$3. \quad {}^2\log \frac{16}{4} = {}^2\log 16 - {}^2\log 4 = 4 - 2 = 2$$

h.
$$^x\log m = \log x = 1$$

Sehingga $^x\log m = \frac{1}{^x\log m}$

Contoh :

1) $^{10}\log 100 \cdot ^{100}\log 10 = ^{10}\log 10^2 \times ^{100}\log 100^{0,5} = 2 \times 0,5 = 1$

2) $^3\log 81 \cdot ^{81}\log 3 = ^3\log 3^4 \times ^{81}\log 81^{0,25} = 4 \times 0,25 = 1$

i.
$$^x\log m \cdot ^m\log n \cdot ^n\log x = 1$$

Contoh :

1) $^{10}\log 100 \times ^{100}\log 10000 \times ^{10000}\log 10 = ^{10}\log 10^2 \times ^{100}\log 100^2 \times ^{10000}\log 10000^{0,25} = 2 \times 2 \times 0,25 = 1$

2) $^3\log 9 \times ^9\log 729 \times ^{729}\log 3 = ^3\log 3^2 \times ^9\log 9^3 \times ^{729}\log 729^{1/6} = 2 \times 3 \times 1/6 = 1$

3) $^2\log \frac{1}{9} \times ^3\log 125 \times ^{\frac{1}{5}}\log 16 = ^2\log 3^{-2} \times ^3\log 5^3 \times ^{5^{-1}}\log 2^4$
 $= -2 \times 3 \times \frac{4}{-1} \left(^2\log 3 \cdot ^3\log 5 \cdot ^5\log 2 \right) = -2 \times 3 \times -4 = 24$

C. Latihan

1. Sederhanakan bentuk pangkat di bawah ini!

a. $5^2 \times 5^3$

b. $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$$\begin{aligned} \text{c. } & \left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^3 \\ \text{d. } & \left(\frac{1}{2}\right)^5 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^2 \\ \text{e. } & \frac{(-7)^{10} : (-7)^5}{(-7)^5} \end{aligned}$$

2. Tuliskan bilangan-bilangan berikut dalam bentuk bilangan bulat positif

$$\begin{aligned} \text{a. } & (-2x)^0 y^3 \\ \text{b. } & (-2x^2)^{-3} \\ \text{c. } & -5a^{-4} \\ \text{d. } & \frac{3b^{-2}}{2x^{-5}} \\ \text{e. } & \left(\frac{xy^{-3}}{2^{-3}z^2}\right)^2 \end{aligned}$$

3. Sederhanakan bentuk-bentuk berikut dalam bentuk pangkat bulat positif

$$\begin{aligned} \text{a. } & 625 \left(\frac{a^3 b^2 c}{5a^4 b^5}\right)^2 \\ \text{b. } & \left(\frac{3x^2 y^3}{2ab^4}\right)^6 \left(\frac{16a^3 b^6}{27xy^3}\right)^2 \\ \text{c. } & \frac{a^{-2} + b^{-1}}{a^{-1} + b^{-2}} \\ \text{d. } & \frac{2^{-3} + 3^{-2}}{2^{-2} + 3^{-3}} \end{aligned}$$

$$e. \left(\frac{x^{-2}y^3z^{-1}}{4x^5y^{-2}z^5} \right)^{-1}$$

4. Nyatakan bilangan-bilangan berikut dalam benyuk akar

$$a. 2^{\frac{3}{4}}$$

$$b. 3^{\frac{2}{5}}$$

$$c. x^{\frac{3}{5}}$$

$$d. y^{\frac{5}{6}}$$

$$e. 3^{-5\frac{1}{2}}$$

5. Nyatakan penjumlahan dan pengurangan di bawah ini dalam bentuk akar yang paling sederhana!

$$a. \sqrt{75} - \sqrt{48}$$

$$b. \sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$$

$$c. \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{32}$$

$$d. 2\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{48}$$

$$e. 2\sqrt{150} - 5\sqrt{54} - 7\sqrt{96}$$

6. Nyatakan tiap bentuk di bawah ini dengan notasi logaritma!

$$a. 5^4 = 625$$

$$b. 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$c. 7^0 = 1$$

$$d. 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

- e. $2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$
7. Nyatakan tiap bentuk logaritma di bawah ini dalam bentuk pangkat(eksponen)!
- a. ${}^2\log \frac{1}{32} = -5$
- b. ${}^2\log 2\sqrt{2} = \frac{3}{2}$
- c. ${}^5\log \frac{1}{25} = -2$
- d. ${}^{\frac{1}{5}}\log 125 = -3$
- e. ${}^a\log b = c$
8. Carilah nilai dari tiap logaritma berikut!
- a. ${}^5\log 0,04$
- b. ${}^{\sqrt{3}}\log 27$
- c. ${}^4\log \sqrt{2}$
- d. ${}^6\log \frac{1}{216}$
- e. ${}^{81}\log \frac{1}{3}$
9. Sederhanakan soal-soal di bawah ini !
- a. ${}^6\log 3 + {}^6\log 12$
- b. ${}^6\log 9 + 2{}^6\log 2 - 2{}^6\log 6$
- c. ${}^2\log 12 + {}^4\log \frac{16}{9}$
- d. ${}^5\log 3 \times {}^3\log \frac{1}{25}$
- e. ${}^2\log 10 \times {}^6\log 4 \times \log 216$

D. Referensi

- Amir Tjolleng. 2019. *Matematika Ekonomi*. Bandung : Yrama Widya
- Dumairy. 2010. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta : BPFE.
- Kalangi, Josep Bintang. 2012. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta : Salemba Empat.
- Yusuf Yahya, Dkk. 2001. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta : Ghalia Indonesia.

PERTEMUAN IV

BARISAN DAN DERET

A. Capaian Pembelajaran

1. Mahasiswa mampu membedakan pengertian barisan dan deret
2. Mahasiswa mampu menghitung nilai dari suku ke- n dari barisan aritmatika maupun geometri
3. Mahasiswa mampu menentukan nilai dari jumlah suku ke- n dari deret aritmatika maupun deret geometri

B. Materi

1. Barisan dan deret

Barisan ialah susunan bilangan yang dibentuk berdasarkan urutan tertentu, bilangan tersebut merupakan suku bilangan yang tersusun berdasarkan penambahan bilangan atau kelipatan bilangan tertentu. Barisan bilangan mempunyai dua jenis yaitu barisan bilangan aritmatika dan barisan bilangan geometri, kedua jenis bilangan tersebut dapat dilihat dari perubahan suku-suku yang berurutan.

Sedangkan deret ialah penjumlahan dari suku-suku bilangan dalam suatu barisan, begitu juga dengan deret,

deret mempunyai dua jenis yaitu deret aritmatika dan deret geometri.

2. Barisan dan Deret Aritmatika (deret hitung)

a. Barisan Aritmatika

Perubahan di antara suku-suku berurutan ditentukan oleh penambahan bilangan tertentu atau suatu kelipatan bilangan tertentu. Jika barisan yang suku berurutannya mempunyai penambahan bilangan yang tetap, maka barisan ini disebut barisan aritmetika. Misal :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... ditambah 2 dari suku didepannya

90, 85, 80, 75, 70, 65, 60, ... ditambah -5 dari suku didepannya

$\frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{9}{8}, \frac{13}{8}, \frac{17}{8}, \frac{21}{8}, \dots$ ditambah $\frac{1}{2}$ dari suku didepannya

Misalkan barisan 2, 5, 8, 11, 14, ... maka :

$$U_1 = 2 = a$$

$$U_2 = 5 = 2 + 3 = a + b$$

$$U_3 = 8 = 5 + 3 = (a + b) + b = a + 2b$$

$$U_4 = 11 = 8 + 3 = (a + 2b) + b = a + 3b$$

$$U_5 = 14 = 11 + 3 = (a + 3b) + b = a + 4b$$

Sehingga menjadi

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Rumus suku ke-n pada barisan aritmatika adalah

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Keterangan :

U_n = suku ke- n

a = suku pertama (U_1)

b = pembeda $b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_n - U_{n-1}$

n = banyaknya suku

Contoh 1 :

Diketahui barisan aritmatika 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...

Tentukan U_{10} dan U_{12}

Penyelesaian :

Diketahui $a = 5$ dan $b = U_2 - U_1 = 10 - 5 = 5$

$$U_{10} = a + (n - 1)b$$

$$U_{10} = 5 + (10 - 1)5$$

$$U_{10} = 5 + (9)5$$

$$U_{10} = 5 + 45$$

$$U_{10} = 50$$

$$U_{12} = a + (n - 1)b$$

$$U_{12} = 5 + (12 - 1)5$$

$$U_{12} = 5 + (11)5$$

$$U_{12} = 5 + 55$$

$$U_{12} = 60$$

Contoh 2:

Diketahui suatu barisan aritmatika dengan suku pertamanya 3 dan mempunyai pembeda 6, tentukan suku ke-6 dan suku ke-8 dari barisan tersebut!

Penyelesaian :

Diketahui

$$a = 3$$

$$b = 6$$

Maka :

$$U_6 = a + (n - 1)b$$

$$U_6 = 3 + (6 - 1)6$$

$$U_6 = 3 + (5)6$$

$$U_6 = 3 + 30$$

$$U_6 = 33$$

$$U_8 = a + (n - 1)b$$

$$U_8 = 3 + (8 - 1)6$$

$$U_8 = 3 + (7)6$$

$$U_8 = 3 + 42$$

$$U_8 = 45$$

Contoh 3 :

Diketahui suatu barisan aritmatika dengan U_5 adalah 41 dan U_{11} adalah 23, tentukan nilai suku pertama dan pembeda dari barisan tersebut, kemudian tentukan nilai dari U_{21} !

Penyelesaian :

$$U_5 = 41$$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_5 = a + (5 - 1)b$$

$$41 = a + 4b \dots \dots \text{persamaan (1)}$$

$$U_{11} = 23$$

$$U_{11} = a + (11 - 1)b$$

$$23 = a + 10b \dots \dots \text{persamaan (2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh :

$$41 = a + 4b$$

$$23 = a + 10b$$

$$18 = -6b$$

$$b = \frac{18}{-6} = -3$$

Untuk mencari nilai a maka dari $b = -3$ disubstitusikan ke persamaan (1)

$$41 = a + 4(-3)$$

$$41 = a - 12$$

$$a = 41 + 12$$

$$a = 53$$

Contoh 4 :

Diketahui suatu barisan aritmatika U_n menyatakan suku ke- n . jika $U_7 = 16$ dan $U_3 + U_9 = 24$ tentukan nilai dari suku ke- 10!

Penyelesaian :

$$U_7 = 16$$

$$16 = a + (7 - 1)b$$

$$16 = a + 6b \dots\dots \text{persamaan (1)}$$

$$U_3 + U_9 = 24$$

$$a + (3 - 1)b + a + (9 - 1)b = 24$$

$$a + 2b + a + 8b = 24$$

$$2a + 10b = 24$$

$$24 = 2a + 10b \dots\dots \text{persamaan (2)}$$

Berdasarkan persamaan (1) dan persamaan (2) maka

$$\begin{array}{rcl} 16 = a + 6b & \left| \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 1 \end{array} \right| & \begin{array}{l} 32 = 2a + 12b \\ 24 = 2a + 10b \end{array} \\ 24 = 2a + 10b & & \hline 8 = 2b \end{array} \quad -$$

$$b = \frac{8}{2} = 4$$

Nilai $b = 4$ maka disubstitusikan ke persamaan (1)

$$16 = a + 6b$$

$$16 = a + 6(4)$$

$$16 = a + 24$$

$$a = 16 - 24 = 8$$

$$U_{10} = a + (10 - 1)b$$

$$U_{10} = 8 + 9(4)$$

$$U_{10} = 8 + 36$$

$$U_{10} = 44$$

b. Deret Aritmatika

Deret aritmatika adalah jumlah dari suku-suku dalam suatu barisan aritmatika. Bentuk deret aritmatika adalah sebagai berikut :

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \cdots + (a + (n - 1)b)$$

atau

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

Untuk memperoleh jumlah suku-suku ke- n atau S_n dari suatu deret baritmatika dengan a sebagai suku pertama dan b sebagai beda yang sama, maka rumusnya sebagai berikut :

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)b]$$

Keterangan :

S_n = jumlah suku ke- n

$a = U_1$ = suku pertama

b = pembeda

n = banyaknya suku

Contoh 5 :

Tentukan S_{10} dan S_{12} dari barisan
5, 10, 15, 20, 25, 30, ...!

Penyelesaian :

Diketahui $a = 5$ dan $b = 5$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2a + (10 - 1)b)$$

$$S_{10} = 5[2(5) + 9(5)]$$

$$S_{10} = 5[10 + 45]$$

$$S_{10} = 5(55) = 275$$

$$S_{12} = \frac{12}{2} [2a + (12 - 1)b]$$

$$S_{12} = 6[2(5) + 11(5)]$$

$$S_{12} = 6[10 + 55]$$

$$S_{12} = 6(65) = 390$$

Contoh 6 :

Diketahui suku ke-3 dan suku ke-6 suatu deret aritmatika berturut-turut adalah 8 dan 17. Jumlah delapan suku pertama deret tersebut adalah ...

Penyelesaian :

$$U_3 = 8$$

$$U_6 = 17$$

Sehingga

$$U_3 = a + (3 - 1)b$$

$$8 = a + 2b \dots \text{Persamaan (1)}$$

$$U_6 = a + (6 - 1)b$$

$$17 = a + 5b \dots \text{Persamaan (2)}$$

Dari persamaan (1) dan persamaan (2) diperoleh :

$$8 = a + 2b$$

$$17 = a + 5b \quad -$$

$$\hline -9 = -3b$$

$$b = \frac{-9}{-3} = 3$$

Dari $b = 3$ disubstitusikan kedalam persamaan (1)

$$8 = a + 2(3)$$

$$8 = a + 6$$

$$a = 2$$

$$S_8 = \frac{8}{2}[2(2) + 7(3)]$$

$$S_8 = 4[4 + 21]$$

$$S_8 = 4(25) = 100$$

Contoh 7 :

Jumlah n suku pertama deret aritmatika dinyatakan dengan $S_n = 2n^2 + 4n$. Tentukan suku ke-9 dari deret aritmatika tersebut adalah ...

Penyelesaian :

$$U_9 = S_9 - S_8$$

$$U_9 = [2(9)^2 + 4(9)] - [2(8)^2 + 4(8)]$$

$$U_9 = [162 + 36] - [128 + 32]$$

$$U_9 = 198 - 160$$

$$U_9 = 38$$

Contoh 8:

Barisan aritmatika x mempunyai nilai $a = 180$ dan $b = -10$, sedangkan barisan aritmatika y mempunyai nilai $a = 45$ dan $b = 5$, pada suku berapa kedua barisan aritmatika ini mempunyai nilai yang sama?

Penyelesaian :

$$U_n(x) = U_n(y)$$

$$a + (n - 1)b = a + (n - 1)b$$

$$180 + (n - 1) - 10 = 45 + (n - 1)5$$

$$180 + (-10n + 10) = 45 + (5n - 5)$$

$$190 - 10n = 40 + 5n$$

$$-15n = -150$$

$$n = \frac{-150}{-15} = 10$$

3. Barisan dan Deret Geometri (deret ukur)

a. Barisan Geometri

Barisan geometri merupakan susunan bilangan yang dibentuk berdasarkan urutan tertentu dimana susunan bilangan tersebut disusun secara berurutan dan mempunyai rasio/pengganda yang tetap. Missal :

2, 4, 8, 16, 32, ... mempunyai rasio = 2

1, 3, 9, 27, 81, 243, ... mempunyai rasio = 3

3125, 625, 125, 25, ... mempunyai rasio = $\frac{1}{5}$

Untuk membentuk rumus barisan geometri, perhatikan penjelasan di bawah ini :

$$U_1 = 2 = a$$

$$U_2 = 4 = ar$$

$$U_3 = 8 = arr = ar^2$$

$$U_4 = 16 = arrr = ar^3$$

$$U_5 = 16 = arrrr = ar^4$$

Maka dapat disimpulkan bahwa dalam menentukan suku ke- n pada barisan geometri menggunakan rumus di bawah ini :

$$U_n = ar^{n-1}$$

Keterangan :

U_n = Suku ke - n

$a = U_n$ = Suku pertama

$$r = \text{rasio/pengganda} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

n = indeks suku

Contoh 9 :

Diketahui barisan 3, 6, 12, 24, ... tentukan suku ke- 8 dari barisan tersebut!

Penyelesaian :

$$a = 3$$

$$r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$$

$$U_8 = ar^{8-1}$$

$$U_8 = 3(2)^7$$

$$U_8 = 3 \times 128$$

$$U_8 = 384$$

Contoh 10 :

Diketahui barisan 24, 18, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{8}$, ... tentukan suku ke- 6 dari barisan tersebut!

Penyelesaian :

$$a = 24$$

$$r = \frac{18}{24} = \frac{27/2}{18} = \frac{3}{4}$$

$$U_6 = ar^{6-1}$$

$$U_6 = 24 \left(\frac{3}{4} \right)^5$$

$$U_6 = 24 \frac{243}{1024} = 5,6953$$

b. Deret Geometri

Seperti halnya dengan deret aritmatika, deret geometri adalah jumlah suku-suku dari barisan

geometri. Bentuk deret geometri dapat dilihat sebagai berikut :

$$S_n = \sum_{i=1}^n U_i = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \dots \dots \dots (1)$$

Persamaan (1) dikalikan dengan bilangan pengganda r , maka :

$$r.S_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 \dots + ar^{n-1} + ar^n \dots \dots \dots (2)$$

Dengan mengurangkan persamaan (2) dari persamaan (1), maka diperoleh :

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

Sehingga diperoleh rumus deret geometri sampai dengan suku ke- n sebagai berikut :

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{a } r < 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{a } r > 1$$

Keterangan :

S_n = jumlah suku ke – n dari barisan geometri

$a = U_n$ = Suku pertama

$$r = \text{rasio/pengganda} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

n = indeks suku

Contoh 11 :

Tentukan S_8 dari barisan geometri di bawah ini !

a. 1, 4, 16, 64, 256, ...

b. -8, -4, -2, -1, ...

Penyelesaian :

a. Diketahui :

$$a = 1$$

$$r = \frac{4}{1} = \frac{16}{4} = 4 \quad r > 1$$

Maka :

$$S_8 = \frac{1(4^8 - 1)}{4 - 1}$$

$$S_8 = \frac{1(65536 - 1)}{4 - 1}$$

$$S_8 = \frac{65535}{3} = 21845$$

b. Diketahui :

$$a = -8$$

$$r = \frac{-4}{-8} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0,5 \quad r < 1$$

Maka :

$$S_8 = \frac{-8 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^8 \right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_8 = \frac{-8 \left(1 - \frac{1}{256} \right)}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_8 = \frac{-8\left(\frac{255}{256}\right)}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_8 = \left(-\frac{2040}{256}\right) \times \left(-\frac{2}{1}\right)$$

$$S_8 = 15,9375$$

C. Latihan

1. Tentukan U_9 dan S_9 dari barisan-barisan aritmatika di bawah ini :
 - a. 3, 6, 9, 12, 15, ...
 - b. 0.6, 1.1, 1.6, 2.1, 2.6, 3.1, ...
 - c. $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{9}{6}, \frac{11}{6}, \dots$
2. Suku ke enam dan suku ke duabelas suatu deret aritmatika berturut-turut adalah 43 dan 85. Jumlah 25 suku pertama deret tersebut adalah ...
3. diketahui suatu barisan aritmatika dengan $U_3 + U_9 + U_{11} = 75$. Suku tengah barisan tersebut adalah 68 dan banyak sukunya 43. Tentukan U_{43} ...
4. jumlah n suku pertama suatu deret aritmatika dinyatakan dengan $S_n = n^2 + 3n$. Tentukan suku ke-20 dari deret tersebut!
5. Diketahui lima orang bersaudara dengan selisih umur yang sama. Anak termuda berusia 13 tahun dan yang tertua 33 tahun. Tentukan jumlah usia mreka seluruhnya!

6. Carilah suku ke-8 dari barisan geometri yang diketahui suku pertama adalah 16 dan rasio adalah 2 !
7. Tentukan jumlah suku ke-8 dari barisan geometri 3, 6, 12, 24 !
8. Carilah tiga bilangan dalam suatu barisan geometri yang apabila dikalikan hasilnya 27 dan apabila dijumlahkan hasilnya 13!

D. Referensi

- Amir Tjolleng. 2019. *Matematika Ekonomi*. Bandung : Yrama Widya
- Dumairy. 2010. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta : BPFE.
- Kalangi, Josep Bintang. 2012. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta : Salemba Empat.
- Yusuf Yahya, Dkk. 2001. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta : Ghalia Indonesia.

PERTEMUAN V

PENERAPAN BARISAN DAN DERET

A. Capaian Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini, diharapkan mahasiswa mampu menganalisis konsep barisan dan deret aritmatika dan geometri atau deret hitung dan deret ukur yang berkaitan dalam penerapan ekonomi dan diharapkan mahasiswa mampu mengembangkan rumus barisan dan deret aritmatika dan geometri yang berkaitan dalam penerapan ekonomi.

B. Materi

Barisan dan deret aritmatika dan geometri atau deret hitung dan deret ukur yang sudah dipelajari pada materi sebelumnya dapat diterapkan dalam bidang ekonomi, diantaranya adalah perhitungan mengenai perkembangan usaha, bunga sederhana, bunga majemuk dan nilai sekarang.

1. Perkembangan Usaha

Konsep barisan dan deret dapat digunakan dalam menghitung perkembangan usaha pada suatu periode tertentu melalui pola kapasitas produksi dan laba.

Usaha yang dimaksud diasumsikan dengan proses perkembangan konstan seiring dengan berjalannya waktu mengikuti pola barisan aritmatika.

Contoh :

Perusahaan “ENTAH MANA” memproduksi barang sebesar 2500 unit pada tahun pertama dan produksinya bertambah sebanyak 100 unit pada setiap tahunnya. Berapa produksi barang pada tahun ke-3 dan berapa jumlah produksi barang sampai dengan tahun ke-3?

Penyelesaian :

Diketahui

$$a = 2500$$

$$b = 100$$

Ditanyakan U_3 dan S_3 ?

Maka ingat Kembali rumus dalam menentukan U_n

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_3 = 2500 + (3 - 1)100$$

$$U_3 = 2500 + (2)(100)$$

$$U_3 = 2700$$

Sedangkan dalam menentukan S_n ingat Kembali rumus berikut ini :

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)b\} \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

$$S_3 = \frac{3}{2}(2500 + 2700)$$

$$S_3 = 7800$$

Contoh :

Suatu perusahaan dapat menghasilkan sebuah laba sebesar Rp. 175.000.000,- pada tahun ke-2 dan Rp 275.000.000,- pada tahun ke-6. Apabila pola perkembangan laba mengikuti pola deret aritmatika, hitunglah berapa perkembangan penerimaan per tahun? Berapa besar penerimaan pada tahun pertama dan pada tahun berapa penerimaan sebesar Rp 375.000.000,-?

Penyelesaian :

Diketahui

$$U_2 = 175.000.000$$

$$U_6 = 275.000.000$$

Diperoleh persamaan :

$$a + b = 175 \quad \dots (1)$$

$$a + 5b = 275 \quad \dots (2)$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (2) akan dicari nilai b dengan cara eliminasi.

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 175 \\ a + 5b & = & 275 \\ \hline & & -4b = -100 \\ & & b = 25 \end{array}$$

$b = 25$ maka untuk menentukan nilai a dengan cara mensubsitusi nilai b ke dalam salah satu persamaan.

$$a + b = 175$$

$$a + 25 = 175$$

$$a = 175 - 25$$

$$a = 150$$

Selanjutnya pada tahun berapa penerimaan sebesar 375 juta?

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_n = 150 + (n - 1)(25)$$

$$375 = 150 + (n - 1)(25)$$

$$375 - 150 = 25n - 25$$

$$225 + 25 = 25n$$

$$250 = 25n$$

$$n = 10$$

Jadi pada tahun ke-10 penerimaan sebesar Rp 375.000.000,-

2. Bunga Sederhana

Perhatikan ilustrasi berikut ini, misalkan kita menabung di bank tentunya bank akan memberikan bunga kepada kita. Begitu juga Ketika kita meminjam uang di bank, pihak bank juga akan memberikan bunga pinjaman kepada kita. Misalkan kita meminjam uang sebesar 5 juta rupiah ke bank, maka dalam mengembalikan uang 5 juta tersebut akan terkena bunga pinjaman karena terjadi perbedaan waktu dalam mengembalikan uang tersebut, sehingga perhitungan dalam mengembalikan uang tersebut 5 juta ditambah dengan bunga pinjaman yang sudah ditentukan oleh bank. Maka dari itu timbullah nilai waktu dari uang. Konsep ini disebut dengan bunga sederhana. Besaran bunga dari suatu pinjaman dapat dihitung dengan rumus berikut ini :

$$I = P \cdot r \cdot t$$

Keterangan :

I = Bunga

P = Pokok pinjaman

r = Tingkat suku bunga

t = lama pinjaman per tahun

Satuan dari tingkat suku bunga pada umumnya satu tahun, akan tetapi bunga dapat ditentukan dengan periode tertentu, misalnya periode tiga bulan, enam bulan atau yang lain.

Contoh :

Seseorang meminjam uang di bank sebesar Rp 2.000.000,- dengan tingkat suku Bunga 12% per tahun. berapa besar uang yang harus dikembalikan setelah 1 tahun?

Penyelesaian :

Diketahui

$$P = 2.000.000$$

$$r = 12\% = 0,12$$

$$t = 1$$

Maka untuk menentukan bunga selama 1 tahun adalah sebagai berikut :

$$I = P \cdot r \cdot t$$

$$I = 2.000.000 \times 0,12 \times 1$$

$$I = 240.000$$

Sehingga orang tersebut harus mengembalikan uang sebesar

$$2.000.000 + 240.000 = 2.240.000$$

Contoh :

Jika seseorang meminjam uang sebesar *Rp* 20.000.000,- dengan bunga 11% per tahun, berapa besar pinjaman yang harus dikembalikan pada tahun ke dua belas?

Penyelesaian :

$$P = 20.000.000$$

$$i = 11\%$$

$$t = 12$$

Maka untuk menentukan nilai dari *I* sebagai berikut :

$$I = P \cdot r \cdot t$$

$$I = 20.000.000 \times 0,11 \times 12$$

$$I = 26.400.000$$

Sehingga orang tersebut harus mengembalikan uang sebesar *Rp* 20.000.000 + 26.400.000 = 46.400.000

3. Bunga Majemuk

Bunga majemuk merupakan bunga yang mendapat bunga atau bunga yang dibungakan. Bunga majemuk diperoleh dari perhitungan modal awal yang diakumulasi dengan nilai bunga selama kurun waktu tertentu. Nilai akumulasi pada tahun ke- *n* dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut :

$$F_n = P(1 + i)^n$$

Atau

$$F_n = P \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mn}$$

Keterangan :

F_n = jumlah uang di masa yang akan datang

P = Modal awal

i = Tingkat bunga pertahun

n = Jumlah Tahun

m = frekuensi pembayaran bunga dalam setahun

Contoh :

Seseorang meminjam uang sebesar Rp 1.200.000,- dengan suku bunga majemuk 4% per tahun. Tentukan berapa besar nilai akumulasi pada tahun ke- 5 !

penyelesaian :

Diketahui

$$P = 1.200.000$$

$$i = 4\%$$

$$n = 5$$

Maka untuk menentukan F_5 dengan cara

$$F_5 = P(1 + i)^5$$

$$F_5 = 1.200.000(1 + 0,04)^5$$

$$F_5 = 1.200.000(1,04)^5$$

$$F_5 = 1.200.000(1,2167)$$

$$F_5 = 1.460.040$$

Jadi nilai akumulasi selama lima tahun diperoleh Rp 1.460.040, –

Contoh :

Adi meminjam uang untuk modal usaha sebesar Rp 5.000.000,- dengan suku bunga 12% per tahun. jika

pembungaan terjadi setiap 6 bulan. Tentukan berapa besar Adi harus mengembalikan pinjaman secara keseluruhan pada tahun ke empat!

Penyelesaian :

Diketahui :

$$P = 5.000.000$$

$$i = 12\%$$

$$m = 2$$

$$n = 4$$

Maka untuk menentukan nilai dari F_4 adalah sebagai berikut

$$F_4 = P \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mn}$$

$$F_4 = 5.000.000 \left(1 + \frac{0,12}{2} \right)^{2 \times 4}$$

$$F_4 = 5.000.000(1 + 0,06)^8$$

$$F_4 = 5.000.000(1,06)^8$$

$$F_4 = 5.000.000 (1,59)$$

$$F_4 = 7.969.240,373 \approx 7.969.241$$

Jadi adi harus mengembalikan pinjaman secara keseluruhan sebesar Rp 7.969.241,00

Contoh :

Modal sebesar Rp 5.000.000,- dibungakan dengan bunga majemuk. Setelah tahun ke-10 modal tersebut menjadi Rp 7.500.000,-. Tentukan berapa besar nilai bunga per tahun?

Penyelesaian :

Diketahui

$$P = 5.000.000$$

$$n = 3$$

$$F_n = 7.500.000$$

Maka untuk menentukan nilai i sebagai berikut :

$$F_{10} = 5.000.000(1 + i)^{10}$$

$$\frac{7.500.000}{5.000.000} = (1 + i)^{10}$$

$$1,5 = (1 + i)^{10}$$

$$1 + i = \sqrt[10]{1,5}$$

$$1 + i = 1,041$$

$$i = 1,041 - 1$$

$$i = 0,041$$

$$i = 41\%$$

4. Model Pertumbuhan Penduduk

Model pertumbuhan penduduk digunakan untuk menaksir banyaknya penduduk pada masa yang akan datang. Dalam menaksir banyaknya penduduk pada masa yang akan datang dapat menggunakan rumus sebagai berikut :

$$P_t = P_1 \cdot R^{t-1}$$

Keterangan :

P_t = jumlah ada tahun pertama

P_1 = jumlah tahun basis

t = indeks waktu dalam satuan tahun

$$R = 1 + r$$

Contoh :

Pada tahun 1990 penduduk kota Semarang sebesar 2.000.000 jiwa. Jika tingkat pertumbuhannya 4% per tahun, maka hitunglah jumlah penduduk di kota Semarang tersebut pada tahun 2006!

Penyelesaian :

Diketahui

$$P_1 = 2.000.000$$

$$P_t = 17$$

$$r = 4\% = 0,04$$

$$R = 1,04$$

Maka untuk menentukan P_t adalah sebagai berikut :

$$P_t = P_1 \cdot R^{t-1}$$

$$P_t = 2.000.000 \times 1,04^{17-1}$$

$$P_t = 2.000.000 \times 1,04^{16}$$

$$P_t = 2.000.000 \times 1,87298125$$

$$P_t = 3.745.962,49 \approx 3.745.963 \text{ jiwa}$$

Sehingga diperoleh jumlah penduduk pada tahun 2006 sebesar 3.745.963 jiwa

Contoh :

Jumlah penduduk pada sebuah kota pada tahun 2000 sebesar 2.345.600 jiwa, jika tingkat pertumbuhannya sebesar 5% per tahun tentukan :

a. jumlah penduduk pada tahun 2015

- b. jika mulai dari tahun 2015 pertumbuhan penduduk menurun menjadi 2,5%, berapa jumlah penduduk 17 tahun kemudian

Penyelesaian :

Diketahui

$$P_1 = 2.345.600$$

$$P_t = 16$$

$$r = 5\% = 0,05$$

$$R = 1,05$$

- a. maka untuk menentukan jumlah penduduk pada tahun 2015 adalah sebagai berikut :

$$P_t = P_1 \cdot R^{t-1}$$

$$P_t = 2.345.600 \times 1,05^{15}$$

$$P_t = 2.345.600 \times 2,07892818$$

$$P_t = 4.876.333,94 \approx 4.876.334 \text{ jiwa}$$

- b. jumlah penduduk 16 tahun kemudian jika mulai dari tahun 2020 pertumbuhan penduduk menurun menjadi 2,5%

$$P_t = 4.876.334$$

$$r = 0,025$$

$$R = 1,025$$

$$P_{17} = 4.876.334 \times 1,025^{16}$$

$$P_{17} = 4.876.334 \times 1,48450562$$

$$P_{17} = 7.238.945,23 \approx 7.238.945 \text{ jiwa}$$

5. Anuitas

Anuitas merupakan suatu rangkaian pembayaran atau penerimaan berkala dengan jumlah tetap selama kurun waktu tertentu. Seperti contohnya pembayaran setiap bulan, kuartal atau dalam jangka satu tahun untuk membayar cicilan atau pinjaman, membayar premi di polis asuransi dan lain sebagainya. Semua pembayaran dalam anuitas dilakukan pada akhir periode dengan bunga majemuk, begitu juga dengan pembayaran pendapatan bunga diperoleh dengan nilai anuitas di akhir periode juga. Hal ini dikarenakan setiap akhir periode akan bersamaan dengan awal periode berikutnya. Dalam konsep anuitas terdapat istilah nilai sekarang dan nilai yang akan datang.

a. Nilai sekarang dari suatu anuitas

Hampir sama antara nilai sekarang dari suatu anuitas dengan nilai yang akan datang dari suatu anuitas, yang membedakan adalah pembayaran dihitung berdasarkan nilai sekarang per periodenya. Sehingga definisi dari nilai sekarang dari suatu anuitas adalah total dari nilai-nilai sekarang pada setiap periode pembayaran/penerimaan. Nilai sekarang dari suatu anuitas disimbolkan dengan *PV* (*Present Value*). Berikut merupakan rumus dari nilai sekarang dari suatu anuitas :

$$PV = P \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

Keterangan :

PV = nilai sekarang dari suatu anuitas

P = jumlah pembayaran per periode

i = tingkat bunga tahunan

n = jumlah periode pembayaran

Contoh :

Jika diketahui seseorang menabung sebesar Rp 2.500.000,- per tahun selama 4 tahun di suatu bank. Apabila berlaku bunga sebesar 12% per tahun dan dibayarkan secara majemuk maka berapakah total uang setelah empat tahun?

Penyelesaian :

Diketahui :

$$P = 2.500.000$$

$$i = 12\% = 0,12$$

$$n = 4$$

Maka untuk menentukan nilai sekarang dari suatu anuitas adalah

$$PV = P \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$$PV = 2.500.000 \left[\frac{1-(1+0,12)^{-4}}{0,12} \right]$$

$$PV = 2.500.000 \left(\frac{0,364}{0,12} \right)$$

$$PV = 7.593.373,37$$

Sehingga total uang setelah empat tahun sebesar Rp 7.593.373,37

Contoh :

Tentukan nilai sekarang dari suatu anuitas dari uang sebesar Rp 1.100.000,- yang diterima setiap tahun selama 4 tahun dengan tingkat suku bunga sebesar 12%.

Penyelesaian :

Diketahui :

$$i = 0,12$$

$$n = 4$$

$$P = 1.100.000$$

Maka untuk menentukan nilai dari PV adalah sebagai berikut :

$$PV = P \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$$PV = 1.100.000 \left[\frac{1-(1+0,12)^{-4}}{0,12} \right]$$

$$PV = 1.100.000 \left[\frac{0,3655}{0,12} \right]$$

$$PV = 3.341.084,281$$

Sehingga nilai yang diterima setelah empat tahun sebesar Rp 3.341.084,281

Berdasarkan rumus dari anuitas yang dibahas sebelumnya, maka kita juga bisa menentukan **cicilan pinjaman** (*loan amortization*). Perhitungan ini digunakan untuk pembayaran cicilan utang atau pinjaman secara periodik. Cicilan pinjaman atau utang dalam jumlah tertentu dapat diterima terlebih dahulu, kemudian melakukan pembayaran dengan cicilan secara periodik sehingga akan terlunasi pada kurun

waktu tertentu. Sehingga cicilan pinjaman merupakan proses pembayaran Kembali hutang yang telah diterima pada waktu sekarang dengan melakukan cicilan secara periodik selama kurun waktu tertentu. Berikut merupakan rumus untuk menentukan cicilan pinjaman:

$$P = \frac{PV}{\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}} \quad \text{Atau} \quad P = PV \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Keterangan :

PV = nilai sekarang dari suatu anuitas

P = jumlah pembayaran per periode

i = tingkat bunga tahunan

n = jumlah periode pembayaran

Contoh :

Pak hendri berencana untuk membeli rumah dengan harga Rp1.600.000.000,- secara kredit. Sesuai dengan perjanjian rumah tersebut akan dibayar dalam kurun waktu dua tahun dengan mencicil. Tingkat suku bunga yang dikenakan sebesar 12 % per tahun. berapa jumlah uang yang harus dibayarkan dengan cicilan setiap bulan oleh pak hendri?

Penyelesaian :

Diketahui :

$PV = 1.600.000.000$

$$n = 3 \text{ tahun}$$

$$i = 12\% = 0,12$$

Maka untuk menentukan nilai dari P adalah sebagai berikut :

$$n = 3 \times 12 = 36$$

$$i = \frac{0,12}{12} = 0,01$$

$$P = PV \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$P = 1.600.000.000 \frac{0,01}{1-(1+0,01)^{-36}}$$

$$P = 1.600.000.000 \frac{0,01}{0,301}$$

$$P = 53.156.146,24$$

Sehingga pak hendri harus melakukan pembayaran sebesar Rp53.156.146,24,- peer bulan.

b. Nilai yang akan datang dari suatu anuitas

Nilai yang akan datang dari suatu anuitas digunakan untuk mencari nilai akhir dari suatu tabungan atau nilai tabungan pada waktu tertentu, dan juga dapat digunakan untuk mengetahui seberapa lama waktu yang dibutuhkan untuk mencapai nilai tertentu serta untuk mengetahui seberapa besar tabungan setiap periode untuk mencapai nilai tertentu. Nilai yang akan datang (*future value*) dari suatu anuitas dirumuskan sebagai berikut :

$$FV = P \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Keterangan :

FV = nilai yang akan datang dari suatu anuitas

P = jumlah pembayaran per periode

i = tingkat bunga tahunan

n = jumlah periode pembayaran

Contoh :

Salman menabung sebesar Rp 5.000.000,- yang disetorkan setiap bulan selama 7 tahun, jika diketahui tingkat Bunga sebesar 12% per bulan. Berapa nilai yang akan datang dari suatu anuitas?

Penyelesaian :

$$P = 5.000.000$$

$$n = 7 \times 12 = 84$$

$$i = 12\% = 0,12$$

Maka untuk menentukan nilai FV adalah sebagai berikut :

$$FV = P \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$FV = 5.000.000 \left[\frac{(1+0,12)^{84} - 1}{0,12} \right]$$

$$FV = 567.637.116,092$$

sehingga besar tabungan salman setelah tujuh tahun adalah Rp 567.637.116,092 rupiah.

Berdasarkan rumus dari nilai yang akan datang dari suatu anuitas, kita juga dapat menghitung **besar tabungan periodik**. Hal ini dapat digunakan dalam perencanaan keuangan misalkan untuk menentukan jumlah anggsuran yang dilakukan suatu periode untuk mencapai jumlah uang pada masa yang akan datang. Berikut merupakan rumus dalam menentukan besar tabungan periodik :

$$P = \frac{FV}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Keterangan :

FV = nilai yang akan datang dari suatu anuitas

P = jumlah pembayaran per periode

i = tingkat bunga tahunan

n = jumlah periode pembayaran

Contoh :

Ibu mahfudhoh menginginkan uang sebesar Rp 500.000.000,- pada saat masa pensiun yang akan terjadi pada 20 tahun lagi. Sehingga untuk mencapai keinginannya tersebut ia menyisihkan uang gajinya di setiap bulan untuk di tabung pada bank “ENTAH MANA”. Berapa besar uang yang harus disisihkan per bulan oleh ibu mahfudhoh untuk mencapai keinginannya tersebut jika diketahui tingkat Bunga sebesar 9% per bulan?

Penyelesaian :

Diketahui :

$$FV = 500.000.000$$

$$n = 20 \times 12 = 240$$

$$i = 9\% = \frac{0,09}{12} = 0,0075$$

Maka untuk menentukan nilai dari P adalah sebagai berikut :

$$P = \frac{FV}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$P = \frac{500.000.000}{\frac{(1+0,0075)^{240} - 1}{0,0075}}$$

$$P = 748.629,78$$

Sehingga besar uang yang harus disetorkan oleh ibu mahfudhoh pada setiap bulan sebesar Rp 748.629,78,-

C. Latihan

1. Arsyadana menandatangani uangnya sebesar Rp 500.000,- pada akhir setiap bulan selama enam tahun. Tentukan besar nilai uang yang diterima jika tingkat suku Bunga 5 % dimajemukkan secara tahunan!
2. Berapa pembayaran cicilan jika seseorang meminjam uang sejumlah Rp 250.000.000,- dalam suatu periode tertentu dan tingkat suku bunga sebesar :
 - a. 10 tahun dengan bunga 12% per tahun dibungakan secara tahunan

- b. 20 tahun dengan bunga 9% per tahun dibungakan secara kuartalan
3. Pak Budi menyiapkan uang untuk biaya sekolah anaknya tiga tahun yang akan datang. Jika setiap bulan pak Budi menabung sebesar Rp 300.000,- dengan suku bunga 10% per tahun, Berapa uang yang akan diterima setelah tiga tahun mendatang?
4. Meli berencana membeli rumah dengan harga Rp. 700.000.000 secara kredit. Ia ingin membayar dengan angsuran selama 7 tahun. Apabila suku bunga KPR Bank adalah 12% per tahun dan meli sudah membayar DP sebesar 10% dari harga rumah tersebut, maka Berapakah angsuran per bulan yang harus dibayarkan oleh meli?
5. Untuk persiapan masa pensiun ibu Arti, maka ia setiap bulan menabung di bank dengan bunga 9% per tahun. Jika setiap bulan Ibu Arti menyisihkan Rp 500.000,- selama 17 tahun maka berapakah uang yang akan diterimanya setelah 17 tahun yang akan datang?

D. Referensi

- Andi Supangat. 2009. *Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta : Kencana.
- Amir Tjolleng. 2019. *Matematika Ekonomi*. Bandung : Yrama Widya
- Dumairy. 2010. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta : BPFE.

- Josep Bintang Kalangi. 2012. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta : Salemba Empat.
- Yusuf Yahya, Dkk. 2001. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta : Ghalia Indonesia.

PERTEMUAN VI

FUNGSI LINEAR

A. Capaian Pembelajaran

Setelah selesai mengikuti materi pada pertemuan ini, diharapkan mahasiswa mampu:

1. Memahami bentuk umum fungsi linear.
2. Menghitung bentuk fungsi linear dengan berbagai metode penyelesaian fungsi linear.
3. Membandingkan bentuk metode penyelesaian fungsi linear.
4. Menggambar grafik fungsi linear.

B. Materi

Fungsi Linear (Penyelesaian Persamaan Linear Dua Variabel)

Sistem persamaan linear terdiri dari beberapa persamaan linear. Penyelesaian persamaan linear dua variabel adalah mencari besarnya nilai variabel-variabel yang memenuhi kedua persamaan linear. Dengan kata lain mencari nilai variabel-variabelnya sehingga kedua persamaan dapat bernilai benar. Secara grafis, menyelesaikan sistem persamaan linear berarti menentukan

himpunan penyelesaian yaitu titik potong kedua garis. Metode yang dapat digunakan untuk mencari nilai variabel-variabel tersebut diantaranya dapat menggunakan metode berikut:

1. Metode Grafik

Metode grafik merupakan salah satu metode untuk mencari himpunan penyelesaian dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel. Berikut ini merupakan langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel menggunakan metode grafik.

- a. Tentukan koordinat dari titik potong masing-masing persamaan terhadap sumbu x dan sumbu y.
- b. Gambarkan grafik dari masing-masing persamaan pada sebuah bidang Cartesius.
- c. Apabila kedua garis berpotongan pada satu titik, maka himpunan penyelesaiannya tepat memiliki satu anggota.
- d. Apabila kedua garis sejajar maka himpunan penyelesaiannya tidak memiliki anggota. Dapat juga dikatakan himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong ($\emptyset$).
- e. Apabila kedua garis saling berhimpit maka himpunan penyelesaiannya memiliki anggota yang tak terhingga jumlahnya.

Dengan menggunakan sifat-sifat dua garis saling berpotongan, dua garis saling sejajar dan dua garis saling

berimpit maka banyaknya anggota himpunan penyelesaian dari system persamaan linear dua variabel adalah sebagai berikut.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + 2y = c_2$$

Jika diberikan dua persamaan linear seperti di atas maka dapat ditetapkan sebagai berikut.

- a. Apabila $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, maka sistem persamaan linear dua variabel hanya memiliki satu anggota dalam himpunan penyelesaiannya.
- b. Apabila $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ dan $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ atau $c_1b_2 - cb_1 \neq 0$, maka sistem persamaan linear dua variabel tidak memiliki anggota dalam himpunan penyelesaiannya (himpunan kosong $= \emptyset$).
- c. Apabila $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ dan $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ atau $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$, maka sistem persamaan linear dua variabel memiliki anggota yang tak terhingga jumlahnya.

Contoh:

Tentukan variabel-variabel x dan y yang memenuhi persamaan $2x + 3y = 5$ dan $4x - y = 17$ dengan metode grafik!

Penyelesaian

Diketahui :

$$2x + 3y = 5$$

$$4x - y = 17$$

Tentukan titik potong masing-masing persamaan pada x dan sumbu y.

- Untuk persamaan $2x + 3y = 5$

Untuk titik potong dengan sumbu x maka nilai $y = 0$, sehingga diperoleh:

$$2x + 3(0) = 5$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2} = 2,5$$

Titik potong (2,5; 0)

Untuk titik potong dengan sumbu y maka $x = 0$, sehingga diperoleh:

$$2(0) + 3y = 5$$

$$3y = 5$$

$$y = \frac{5}{3} = 1,67$$

Titik potong (0;1,67)

- Untuk persamaan $4x - y = 17$

Untuk titik potong dengan sumbu x maka $y = 0$, sehingga diperoleh:

$$4x - 0 = 17$$

$$4x = 17$$

$$x = \frac{17}{4} = 4,25$$

Titik potong (4,25;0)

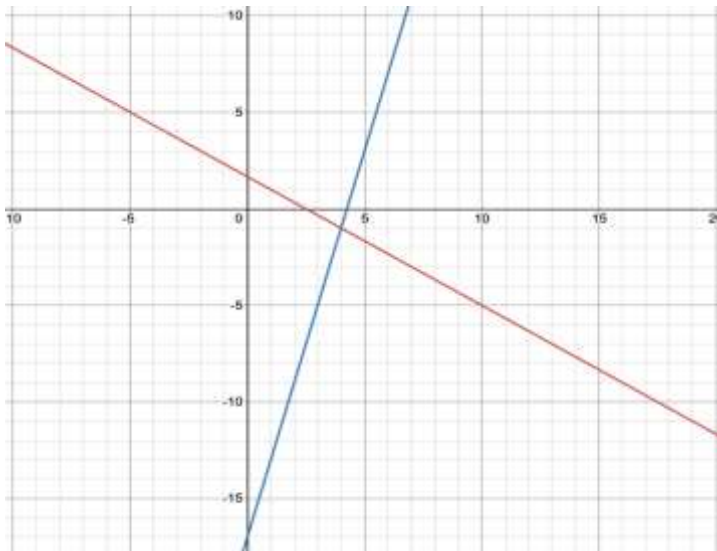
Untuk titik potong dengan sumbu y maka $x = 0$, sehingga diperoleh:

$$4(0) - y = 17$$

$$-y = 17$$

$$y = -17$$

Titik potong (0,-17)



Berdasarkan gambar grafik di atas, titik potong kedua garis tersebut berada pada titik (4,-1) yang berarti nilai $x = 4$ dan $y = -1$.

2. Substitusi

Metode substitusi merupakan salah satu metode untuk menghitung variabel dalam persamaan linear dua variabel yang caranya adalah menyelesaikan salah satu persamaan terlebih dahulu kemudian mensubstitusikannya ke dalam persamaan yang lain. Dalam metode substitusi suatu variabel dinyatakan dalam variabel yang lain dari suatu persamaan, selanjutnya variabel ini digunakan untuk mengganti variabel yang sama dalam persamaan lainnya sehingga menjadi persamaan satu variabel untuk mencari nilai variabel yang tersisa. Langkah untuk menyelesaikan persamaan linear dua variabel dengan cara substitusi adalah sebagai berikut.

- a. Pilihlah salah satu persamaan kemudian nyatakan salah satu variabel persamaan tersebut ke dalam variabel yang lain sehingga diperoleh persamaan baru.
- b. Substitusikan persamaan yang diperoleh sebelumnya ke persamaan lainnya sehingga diperoleh sebuah persamaan linear satu variabel. Kemudian selesaikan persamaan tersebut sehingga diperoleh nilai salah satu variabel.
- c. Substitusikan nilai variabel yang diperoleh pada langkah sebelumnya ke persamaan yang diperoleh pada langkah awal sehingga diperoleh nilai variabel yang kedua.

Contoh:

Tentukan variabel-variabel x dan y yang memenuhi persamaan $2x + 3y = 5$ dan $4x - y = 17$ dengan metode substitusi!

Penyelesaian:

Diketahui:

$$2x + 3y = 5 \dots\dots\dots \text{(persamaan i)}$$

$$4x - y = 17 \rightarrow 4x - 17 = y \dots\dots \text{(persamaan ii)}$$

Substitusikan persamaan ii ke dalam persamaan i

$$2x + 3y = 5$$

$$2x + 3(4x - 17) = 5$$

$$2x + 12x - 51 = 5$$

$$14x = 5 + 51$$

$$14x = 56$$

$$x = \frac{56}{14}$$

$$x = 4$$

Substitusikan nilai $x = 4$ ke persamaan ii

$$y = 4x - 17$$

$$y = 4(4) - 17$$

$$y = -1$$

Jadi penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $x = 4$ dan $y = -1$

3. Eliminasi

Eliminasi berasal dari kosa kata Bahasa Inggris yaitu *eliminate* yang berarti menghapuskan. Metode

eliminasi merupakan salah satu metode penyelesaian persamaan linear dua variabel dengan cara menghilangkan sementara (mengeliminasi) salah satu variabel tertentu dengan menyamakan koefisiennya, sehingga dapat dicari nilai dari variabel yang lain. Langkah untuk menyelesaikan persamaan linear dua variabel menggunakan metode eliminasi adalah sebagai berikut.

- a. Eliminasi (hilangkan) salah satu variabel, misalnya adalah variabel x dengan cara menyamakan nilai koefisiennya kemudian menjumlahkan atau mengurangi suku-suku yang sama dari kedua persamaan tersebut sehingga diperoleh nilai variabel yang kedua atau variabel y .
- b. Eliminasi (hilangkan) variabel yang kedua, misalnya adalah variabel y dan perhitungannya sama seperti langkah pertama di atas sehingga akan diperoleh nilai dari variabel x .

Jika koefisien dari variabel yang di hilangkan tandanya berbeda (positif dan negative) maka jumlahkan kedua persamaan tersebut.

Contoh:

Tentukan nilai dari variabel x dan y dari persamaan $2x + 3y = 5$ dan $4x - y = 17$ dengan metode eliminasi!

Penyelesaian :

Diketahui :

$$2x + 3y = 5$$

$$4x - y = 17$$

a. Eliminasi variabel x

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y = 5 & \times 2 & 4x + 6y = 10 \\ 4x - y = 17 & \times 1 & 4x - y = 17 \quad - \\ \hline & & 0 + 7y = -7 \\ & & y = \frac{-7}{7} \\ & & y = -1 \end{array}$$

b. Eliminasi variabel y

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y = 5 & \times 1 & 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 17 & \times 3 & 12x - 3y = 51 \quad + \\ \hline & & 14x + 0 = 56 \\ & & x = \frac{56}{14} \\ & & x = 4 \end{array}$$

Jadi penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $x = 4$
dan $y = -1$

4. Campuran

Jika dirasa metode penyelesaian eliminasi dan substitusi dirasa kurang ringkas, maka dapat digunakan metode campuran yang merupakan gabungan dari kedua metode tersebut. Metode campuran adalah metode penyelesaian persamaan linear dua variabel dengan cara menggabungkan metode eliminasi dan metode substitusi. Metode eliminasi mempunyai langkah awal yang cukup mudah dan singkat, sedangkan metode substitusi mempunyai cara akhir yang baik. Metode campuran ini merupakan metode yang sering digunakan dalam menyelesaikan system persamaan linear dua variabel karena dinilai lebih ringkas dan baik. Untuk menentukan variabel yang akan ditentukan nilainya sebaiknya pilih yang prosesnya lebih mudah dengan cara berikut:

- a. Tentukan mana yang lebih ringkas atau lebih mudah antara proses perkalian dan pengurangannya.
- b. Jika lebih mudah dikalikan mengikuti koefisien pada variabel x , berarti akan ditentukan nilai dari variabel y dan berlaku sebaliknya.

Contoh:

Tentukan nilai dari variabel x dan y dari persamaan $2x + 3y = 5$ dan $4x - y = 17$ dengan metode campuran!

Penyelesaian:

Diketahui :

$$2x + 3y = 5$$

$$4x - y = 17$$

Eliminasi variabel x

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y = 5 & | \times 2 & 4x + 6y = 10 \\ 4x - y = 17 & | \times 1 & 4x - y = 17 \\ \hline & & 0 + 7y = -7 \\ & & y = \frac{-7}{7} \\ & & y = -1 \end{array}$$

Substitusikan nilai $y = -1$ ke dalam salah satu persamaan

$$2x + 3y = 5$$

$$2x + 3(-1) = 5$$

$$2x - 3 = 5$$

$$2x = 5 + 3$$

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

Jadi penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $x = 4$ dan $y = -1$.

5. Determinan

Pada matriks persegi dikenal dengan istilah determinan. Determinan merupakan suatu bilangan yang berkaitan dengan matriks persegi. Metode determinan ini juga sering disebut dengan metode *cramer*. Untuk mencari akar-akar dari persamaan linear dua variabel menggunakan cara determinan, maka langkahnya adalah merubah bentuk persamaan linear menjadi bentuk matriks terlebih dahulu. Langkah dalam penyelesaian sistem persamaan dua variabel menggunakan determinan adalah sebagai berikut.

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

Persamaan di atas jika diubah menjadi bentuk matriks maka akan menjadi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

a. Mencari variabel x :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed-bf}{ad-dc}$$

Dimana:

D : determinan matriks koefisien

Dx : determinan matriks dengan menggantikan variabel x dengan konstanta

b. Mencari variabel y:

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ed}{ad - bc}$$

Dimana:

D : determinan matriks koefisien

Dy : determinan matriks dengan menggantikan variabel x dengan konstanta.

Contoh:

Dengan cara determinan, carilah nilai variabel-variabel x dan y yang memenuhi persamaan $2x + 3y = 5$ dan $4x - y = 17$!

Penyelesaian:

$$2x + 3y = 5$$

$$4x - y = 17$$

Persamaan di atas jika diubah menjadi bentuk matriks maka akan menjadi

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \end{bmatrix}$$

c. Mencari variabel x

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 17 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{(5)(-1) - (3)(17)}{(2)(-1) - (3)(4)}$$

$$x = \frac{(-5) - 51}{(-2) - 12}$$

$$x = \frac{-56}{-14}$$

$$x = 4$$

d. Mencari variabel y

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{(2)(17) - (5)(4)}{(2)(-1) - (3)(4)}$$

$$y = \frac{34 - 20}{(-2) - 12}$$

$$y = \frac{14}{-14}$$

$$y = -1$$

Jadi penyelesaian dari persamaan tersebut adalah

$$x = 4 \text{ dan } y = -1.$$

6. Invers Matriks

Jika diberikan dua buah matriks persegi yaitu matriks A dan matriks B dan berlaku $A \cdot B = B \cdot A = I$ maka matriks A dan matriks B merupakan matriks yang saling invers. Matriks yang mempunyai invers disebut *invertible* atau matriks *non singular*, sedangkan matriks yang tidak mempunyai invers disebut matriks *singular*. Invers matriks dapat digunakan untuk mempermudah dalam menentukan himpunan penyelesaian suatu system persamaan linear dua variabel. Sama seperti cara determinan, untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan dua variabel menggunakan metode invers maka diperlukan mengubah bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel menjadi bentuk matriks seperti berikut.

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

Persamaan di atas jika diubah menjadi bentuk matriks maka akan menjadi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Kemudian bentuk matriks $AX=B$ ini kita ubah menjadi bentuk invers.

$$AX=B$$

$$X=A^{-1}B$$

A^{-1} merupakan invers dari matriks A . Dengan menggunakan rumus matriks invers maka bentuk $X=A^{-1}B$ menjadi seperti berikut.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Contoh:

Dengan menggunakan cara invers matriks, carilah nilai variabel-variabel x dan y yang memenuhi persamaan $2x + 3y = 5$ dan $4x - y = 17$!

Penyelesaian:

$$2x + 3y = 5$$

$$4x - y = 17$$

Persamaan di atas jika diubah menjadi bentuk matriks maka akan menjadi

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Ubah matriks $AX=B$ menjadi bentuk invers $X=A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(2)(-1)-(3)(4)} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(-2) - 12} \begin{bmatrix} (-1)(5) + (-3)(17) \\ (-4)(5) + (2)(17) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} (-5) + (-51) \\ (-20) + (34) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -56 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-56}{-14} \\ \frac{14}{-14} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jadi penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $x = 4$ dan $y = -1$.

C. Latihan

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari system persamaan $x + 2y = 4$ dan $2x + 8y = 24$ untuk $x, y \in \mathbb{R}$!
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari system persamaan $2x + 4y = 4$ dan $4x + 8y = 16$ untuk $x, y \in \mathbb{R}$!
3. Tentukan nilai dari variabel-variabel x dan y yang memenuhi persamaan $x + y = 5$ dan $x - y = 1$ dengan metode substitusi!
4. Tentukan nilai dari variabel-variabel x dan y yang memenuhi persamaan $6x + 2y = 30$ dan $-x - y = -5$ dengan metode substitusi!
5. Tentukan nilai dari variabel-variabel x dan y yang memenuhi persamaan $-x + 3y = -7$ dan $3x + y = 3$ dengan metode eliminasi!

6. Tentukan nilai dari variabel-variabel x dan y yang memenuhi persamaan $x - 8y = 57$ dan $18x + 7y = -31$ dengan metode eliminasi!
7. Tentukan nilai dari variabel-variabel x dan y yang memenuhi persamaan $2x + 3y = 16$ dan $x - 2y = 4$ dengan metode determinan!
8. Tentukan nilai dari variabel-variabel x dan y yang memenuhi persamaan $3x - 2y = 6$ dan $x + y = 4$ dengan metode determinan!
9. Tentukan nilai dari variabel-variabel x dan y yang memenuhi persamaan $6x + 2y = 30$ dan $-x - y = -5$ dengan metode invers!
10. Tentukan nilai dari variabel-variabel x dan y yang memenuhi persamaan $x + 2y = 2$ dan $x - 2y = 2$ dengan metode invers!
11. Freya membeli empat kemeja dan tiga celana dengan harga Rp 1.950.000,00. Lavanya membeli dua kemeja dan empat celana dengan

D. Referensi

- Chiang, Alpha. (2006). Dasar-dasar Matematika Ekonomi. Jakarta: Erlangga.
- Dumairy. (2010). Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, BPFE, Yogyakarta.
- Hamidah, dkk. (2020). Matematika Ekonomi 1 dan 2 untuk Analisa Ekonomi, Bisnis dan Ilmu Sosial. Surabaya : Scopindo Media Pustaka.

- Indriyati, Mirna. (2009). Ayo, Belajar Persamaan, Pertidaksamaan, dan Sistem Persamaan Linear!, Jakarta: PT Sunda Kelapa Pustaka. Hal 21-22.
- Johannes, dkk. (1982). Pengantar Matematika untuk Ekonomi. Jakarta: LP3ES.
- Kamarullah. (2017). Pendidikan Matematika di Sekolah Kita. Jurnal Al Khawarizmi. 1 (1), 21-32.
- Markonah dan Hedwigis Esti. (2008). Matematika Ekonomi dan Bisnis 1. Jakarta: PT. Gramedia
- Mesra, B. (2016). Penerapan Ilmu Matematika dalam Ekonomi dan Bisnis. Yogyakarta: CV Budi Utama.
- Olivier, J. (2017). Business Math: A Step by Step Handbook. Canada: Creative Commons License (CC BY-NC-SA).
- Putrodjoyo G dan Untung Rahardja. (2015). Matematika Ekonomi. Jakarta: PT. Grasindo.
- Rifa'i Rusdian. (2016). Aljabar Matriks Dasar. Yogyakarta: Deepublish.
- Sari, M. K. (2011). Profil kesulitan siswa kelas VIII dalam memecahkan masalah matematika pada materi pokok sistem persamaan linear dua variabel.
- Sessu, A. (2017). Pengantar Matematika Ekonomi. Jakarta: PT Bumi Aksar

PERTEMUAN VII

PENERAPAN FUNGSI LINEAR

A. Capaian Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini, diharapkan mahasiswa mampu:

1. Menganalisis permasalahan ekonomi yang berkaitan dengan fungsi linear.
2. Mengembangkan rumus fungsi linear dalam penerapan ekonomi.

B. Materi

Penerapan fungsi linear dapat dijadikan model dalam berbagai permasalahan ekonomi. Contoh penerapan fungsi linear dalam ekonomi adalah sebagai berikut.



Gambar 7. 1 Segerombolan Kucing

Untuk mengetahui lebih dalam mengenai fungsi-fungsi tersebut kita akan membahas lebih mendalam.

1. Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran dan Keseimbangan Pasar

a. Fungsi Permintaan (*demand function*)

Permintaan adalah sejumlah barang atau jasa yang diminta oleh konsumen pada tingkat harga tertentu. Permintaan terjadi apabila ada keinginan untuk membeli barang maupun jasa, akan tetapi keinginan tersebut harus disertai dengan kemampuan konsumen untuk membayar barang maupun jasa tersebut. Di dalam permintaan terdapat tiga hal yang harus diperhatikan yaitu:

- 1) Kuantitas yang diminta
- 2) Keinginan yang disertai kemampuan membayar
- 3) Kuantitas yang diinginkan yang dinyatakan dalam satuan waktu

Kuantitas yang diminta menunjukkan jumlah permintaan suatu barang maupun jasa berdasarkan harga, selera konsumen, dan harga barang substitusi yang dapat menggantikan barang tersebut. Pernyataan satuan waktu memiliki arti jumlah permintaan harus disertai periode waktu jumlah barang tersebut diinginkan.

Fungsi permintaan menurut Markonah dan Hedwigis (2008: 23) merupakan hubungan antara harga dengan jumlah barang/jasa yang diminta/dibeli dengan asumsi variabel lain konstan (*ceteris paribus*). Pada teori permintaan diketahui jika harga suatu barang meningkat maka permintaan terhadap barang atau jasa tersebut akan menurun, sebaliknya penurunan harga barang tersebut akan mendorong peningkatan permintaannya dengan asumsi *ceteris paribus*. Teori ini akan berlaku dengan asumsi bahwa variabel lain yang mempengaruhi jumlah permintaan selain dari harga dianggap konstan (*ceteris paribus*). Terdapat hubungan ketergantungan dua variabel, yaitu variabel harga sebagai variabel independent dan jumlah permintaan atau variabel dependent. Hubungan kedua variabel tersebut dapat kita tuliskan dalam sebuah fungsi permintaan. Sehingga fungsi permintaan menghubungkan variabel harga dan variabel jumlah barang atau jasa yang diminta.

Markonah dan Hedwigis (2008: 23) menyebutkan ciri-ciri dari fungsi permintaan yaitu:

- 1) Variabel Q dan P positif $\rightarrow$ paling kecil = 0.

$$0 \leq Q \leq a$$

$$0 \leq P \leq b$$

- 2) Setiap nilai Q hanya mempunyai satu nilai P dan sebaliknya.

- 3) Fungsi permintaan mempunyai lereng negative (kiri atas ke kanan bawah).

Bentuk Umum Fungsi Permintaan :

$$Q_d = a - bP$$

Atau dapat juga dinyatakan dengan

$$P_d = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}Q$$

Dimana :

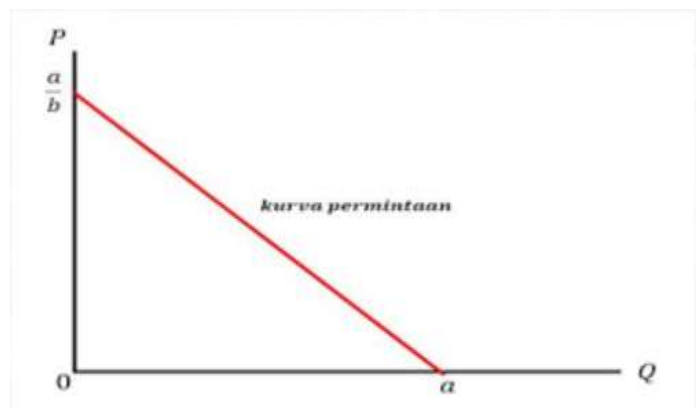
Q = jumlah produk yang diminta (*Quantity*)

P = harga produk (*Price*)

a dan b = parameter

(b bertanda negatif yang artinya kemiringan garis ke arah bawah)

Kurva Permintaan



Jika P diletakkan pada sumbu vertical dan Q diletakkan pada sumbu horizontal, serta hubungan antara P dan Q berbalik arah maka kurva permintaan digambarkan sebagai sebuah kurva yang bergerak turun dari arah kiri atas ke kanan bawah atau sebuah kurva yang mempunyai gradien negatif.

Contoh:

Di pasar modern harga sepasang sandal jepit adalah Rp 10.000,00 dan jumlah barang yang diminta sebanyak 40 pasang. Ketika sandal jepit tersebut tersebut harganya naik menjadi Rp 15.000,00 jumlah barang yang diminta sebanyak 20 pasang. Tentukan persamaan barang tersebut!

Penyelesaian :

Diketahui :

$$P_1 = 10.000$$

$$Q_1 = 40$$

$$P_2 = 15.000$$

$$Q_2 = 20$$

Maka :

$$\frac{P-P_1}{P_2-P_1} = \frac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1}$$

$$\frac{P-10.000}{15.000-10.000} = \frac{Q-40}{20-40}$$

$$\frac{P-10.000}{5.000} = \frac{Q-40}{-20}$$

$$P - 10.000(-20) = Q - 40 (5.000)$$

$$-20P + 200.000 = 5.000Q - 200.000$$

$$400.000 - 20P = 5.000Q$$

$$Q = -0,004P + 80$$

Atau

$$20P = -5.000Q + 400.000 \rightarrow P = -250Q + 20.000$$

Sehingga permintaan dari sandal jepit adalah $P = -250Q + 20.000$

b. Fungsi Penawaran

Penawaran merupakan keadaan jumlah barang atau jasa yang ditawarkan pada saat tingkat harga tertentu. Fungsi penawaran merupakan fungsi yang menunjukkan hubungan antara harga barang yang ada di pasar dengan kuantitas penawaran yang ditawarkan oleh produsen. Teori penawaran mengatakan bahwa jika harga suatu barang meningkat maka penawaran barang tersebut akan meningkat, sebaliknya penurunan harga barang tersebut akan mendorong penurunan penawarannya dengan asumsi *ceteris paribus* (jumlah barang yang ditawarkan berbanding lurus terhadap harga barang). Hukum penawaran bersifat demikian dikarenakan oleh

faktor harga signifikan yang mempengaruhi daya jangkau pasar untuk melakukan kegiatan transaksi pembelian barang atau jasa. Pada kondisi harga naik, para produsen mempersepsikan pengaruh pada kelancaran transaksi sehingga dapat memberikan kontribusi pada laba (*profit*), yaitu semakin banyak barang atau jasa yang terjual maka akan semakin besar laba (*profit*) yang akan diperoleh oleh produsen.

Teori ini juga berlaku asumsi variabel lain selain dari harga yang mempengaruhi penawaran dinaggap tetap atau konstan (*ceteris paribus*). Gambaran dari teori ini adalah harga memiliki hubungan searah dengan penawaran. Sehingga fungsi penawaran menghubungkan antara variabel harga dan variabel jumlah barang/ jasa yang ditawarkan.

Markonah dan Hedwigis (2008: 26) menyebutkan ciri-ciri dari fungsi penawaran yaitu:

- 1) Variabel Q dan P selalu positif.
- 2) Setiap nilai Q hanya ada satu nilai P
- 3) Fungsi penawaran monoton naik (dari arah kiri bawah menuju ke kanan atas dan slope positif).

Bentuk Umum Fungsi Penawaran :

$$Q_s = -a + bP$$

Atau dapat juga ditulis

$$P_s = \frac{a}{b} + \frac{1}{b}Q$$

Dimana :

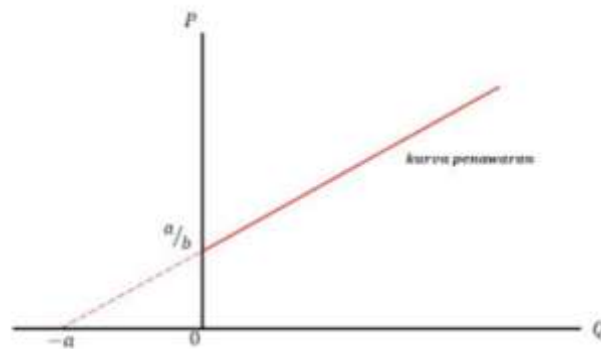
Q = Jumlah produk yang ditawarkan

P = Harga Produk

a dan b = parameter

(b bertanda positif artinya kemiringan garis ke arah atas)

Kurva Penawaran



Jika P diletakkan pada sumbu vertical dan Q diletakkan pada sumbu horizontal serta karena hubungan antara jumlah P dan Q adalah hubungan yang searah maka kurva penawaran adalah suatu

kurva yang bergerak dari kiri bawah ke kanan atas atau sebuah kurva yang mempunyai gradien positif.

Contoh:

Harga sepasang sandal jepit di pasar bersih adalah Rp 10.000,00 dan jumlah barang yang ditawarkan sebanyak 40 pasang. Ketika barang tersebut harganya naik menjadi Rp 15.000,00 jumlah barang yang ditawarkan sebanyak 60 pasang. Tentukan persamaan penawaran sandal jepit tersebut!

Penyelesaian:

Diketahui :

$$P_1 = 10.000$$

$$Q_1 = 40$$

$$P_2 = 15.000$$

$$Q_2 = 60$$

Maka :

$$\frac{P-P_1}{P_2-P_1} = \frac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1}$$

$$\frac{P-10.000}{15.000-10.000} = \frac{Q-40}{60-40}$$

$$\frac{P-10.000}{5.000} = \frac{Q-40}{20}$$

$$P - 10.000(20) = Q - 40(5.000)$$

$$20P - 200.000 = 5.000P - 200.000$$

$$20P = 5.000Q$$

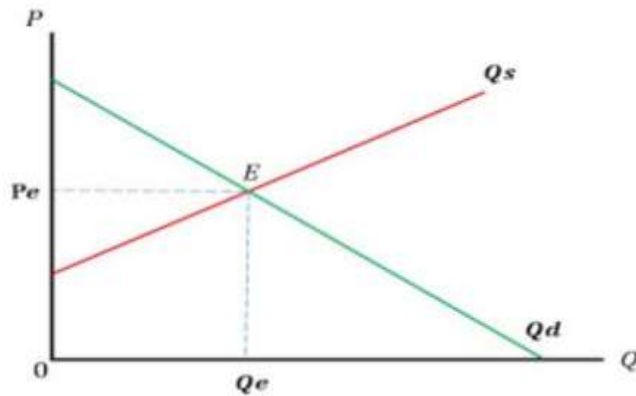
$$Q = 0,25P$$

c. Keseimbangan Pasar

1) Keseimbangan pasar satu macam produk

Pada dasarnya proses terbentuknya harga terjadi ketika tercapainya tingkat keseimbangan antara permintaan dan penawaran. Dapat dikatakan bahwa harga dan kuantitas keseimbangan pasar merupakan hasil kesepakatan antara produsen dan konsumen dimana jumlah dan harga yang ditawarkan sama besar. Pada pasar suatu jenis barang juga disebut terdapat pada keseimbangan (*equilibrium*) apabila jumlah barang yang diminta sama dengan jumlah barang yang ditawarkan. Keseimbangan pasar merupakan titik temu antara produsen dan konsumen dengan syarat keseimbangan $Q_d = Q_s$.

Kurva keseimbangan pasar



Keseimbangan pasar dicapai ketika perpotongan antara kurva Q_d dan Q_s , sehingga pada titik potong inilah didapatkan harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan. Jadi pada titik E kita dapatkan titik keseimbangan (*equilibrium*).

Contoh:

Diberikan suatu fungsi permintaan $Q = 5000 - 20P$ dan fungsi penawaran $Q = -50 + 5P$. Berapa harga keseimbangan pasar dan jumlah keseimbangan pasarnya?

Penyelesaian:

$$Q = 5000 - 20P$$

$$Q = -50 + 5P$$

Maka,

$$Q_d = Q_s$$

$$5000 - 20P = -50 + 5P$$

$$5000 + 50 = 20P + 5P$$

$$5050 = 25P$$

$$P = \frac{5050}{25}$$

$$P = 202$$

Kemudian substitusi nilai $P = 202$ ke salah satu persamaan :

$$Q = 5000 - 20P$$

$$Q = 5000 - 20(202)$$

$$Q = 5000 - 4040$$

$$Q = 960$$

Jadi titik keseimbangan (Q,P) berada pada titik (960,202).

2) Keseimbangan pasar dua macam produk

Hubungan antara fungsi permintaan dan fungsi penawaran pada materi sebelumnya menyatakan bahwa jumlah yang diminta dan jumlah yang ditawarkan akan suatu barang hanya dipengaruhi oleh harga barang itu sendiri. Jika

fungsi permintaan dan fungsi penawaran tersebut diperluas lagi maka akan menjadi fungsi yang mempunyai dua variabel bebas. Kedua variabel bebas yang mempengaruhi jumlah yang diminta dan jumlah yang ditawarkan adalah :

- a) Harga produk itu sendiri
- b) Harga produk lain yang saling berkaitan

Jika kedua produk tersebut mengalami fluktuasi pada harganya maka akan mempengaruhi bentuk keseimbangan pasar. Misalkan terdapat 2 buah macam barang yaitu barang X dan barang Y yang memiliki hubungan substitusi atau komplemen, maka fungsi permintaan dan penawaran setiap produk adalah:

$$Q_{dx} = f(P_x, P_y)$$

$$Q_{dy} = f(P_y, P_x)$$

Keseimbangan yang terjadi adalah keseimbangan untuk kedua macam produk:

- a) Untuk produk X keseimbangannya adalah jumlah permintaan terhadap X sama dengan jumlah penawaran pada X atau $Q_{dx} = Q_{sx}$.
- b) Untuk produk Y keseimbangannya adalah jumlah permintaan terhadap Y sama dengan jumlah penawaran pada Y atau $Q_{dy} = Q_{sy}$.

Contoh:

Apabila diberikan fungsi permintaan dan fungsi penawaran dari dua macam produk yang mempunyai hubungan substitusi sebagai berikut:

$$Q_{dx} = 2 - 2P_x + P_y \quad Q_{sx} = -8 + 4P_x - P_y$$

$$Q_{sy} = -9 - P_x + 3P_y \quad Q_{dy} = 1 + P_x - P_y$$

Carilah harga dan jumlah keseimbangan pasarnya!

Penyelesaian:

Diketahui:

$$Q_{dx} = 5 - 2P_x + P_y \quad Q_{sx} = -5 + 4P_x - P_y$$

$$Q_{sy} = -4 - P_x + 3P_y \quad Q_{dy} = 6 + P_x - P_y$$

Syarat keeseimbangan pasar

$$Q_{dx} = Q_{sx}$$

$$5 - 2P_x + P_y = -5 + 4P_x - P_y$$

$$10 - 6P_x + 2P_y = 0 \rightarrow 10 = 6P_x - 2P_y \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$Q_{dy} = Q_{sy}$$

$$-4 - P_x + 3P_y = 6 + P_x - P_y$$

$$0 = 10 + 2P_x - 4P_y \rightarrow 10 = -2P_x + 4P_y \quad \dots\dots\dots (ii)$$

Eliminasi persamaan (i) dan persamaan (ii)

$$\begin{array}{r|l|l} 6P_x - 2P_y = 10 & \times 1 & 6P_x - 2P_y = 10 \\ -2P_x + 4P_y = 10 & \times 3 & -6P_x + 12P_y = 30 \\ \hline & & 10P_y = 40 \end{array}$$

$$P_y = \frac{40}{10}$$

$$P_y = 4$$

Substitusi nilai $P_y = 4$ ke persamaan (i)

$$6P_x - 2P_y = 10$$

$$6P_x - 2(4) = 10$$

$$6P_x - 8 = 10$$

$$6P_x = 10 + 8$$

$$6P_x = 18$$

$$P_x = \frac{18}{6}$$

$$P_x = 3$$

Substitusi nilai $P_x = 3$ dan $P_y = 4$ ke dalam persamaan Q_{dx} dan Q_{dy}

$$Q_{dx} = 5 - 2P_x + P_y$$

$$Q_{dx} = 5 - 2(3) + 4$$

$$Q_{dx} = 3$$

$$Q_{dy} = 6 + P_x - P_y$$

$$Q_{dy} = 6 + 3 - 4$$

$$Q_{dy} = 5$$

Sehingga diperoleh nilai $Q_x = 3$; $Q_y = 5$; $P_x = 3$;

$$P_y = 4$$

2. Pengaruh Pajak Spesifik Terhadap Keseimbangan pasar

Pengenaan pajak dan subsidi terhadap suatu barang dan jasa akan berpengaruh pada keseimbangan pasar termasuk di dalamnya berpengaruh pada harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan. Pajak sendiri merupakan iuran wajib rakyat kepada negara berdasarkan undang-undang yang bersifat memaksa dan digunakan sebagai kebutuhan negara untuk kemakmuran rakyat. Pengenaan pajak spesifik merupakan pengenaan pajak dengan nominal pajak tertentu (t) terhadap objek pajak. Suatu barang yang terkena pajak maka akan menyebabkan harga jual barang tersebut naik. Hal ini dikarenakan setelah barang kena pajak, produsen akan berusaha mengalihkan (sebagian) beban pajak tersebut kepada konsumen. Sehingga pengenaan pajak sebesar t untuk setiap unit barang yang dijual menyebabkan kurva bergeser ke arah atas, dengan titik potong yang lebih besar (lebih tinggi) pada sumbu harga. Perlu diketahui bahwa fungsi yang berubah hanya fungsi penawarannya saja, sedangkan fungsi permintaannya tetap.

Fungsi penawaran setelah pajak :

$$P' = a + bQ + t$$

$$P' = (a + t) + bQ$$

- a. Beban pajak yang ditanggung konsumen dihitung dari harga keseimbangan setelah pengenaan pajak dikurangkan dengan sebelum pengenaan pajak. Artinya bahwa harga sekarang dikurangi harga sebelumnya dan jika ada selisih maka itulah besar pajak yang ditanggung konsumen, dimana kenaikan harga terjadi ketika ada pengenaan pajak yang dilakukan oleh pemerintah. Beban pajak yang ditanggung konsumen dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut.

$$Tk = Pe' - Pe$$

Dimana :

Tk = besar pajak per unit yang ditanggung konsumen

Pe' = harga keseimbangan sesudah terkena pajak

Pe = harga keseimbangan sebelum terkena pajak

- b. Beban pajak yang ditanggung oleh produsen merupakan besar selisih tarif pajak per unit dengan besar pajak per unit yang ditanggung konsumen. Beban pajak yang ditanggung oleh produsen dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut.

$$Tp = T - Tk$$

Dimana :

Tp = pajak per unit yang ditanggung oleh produsen

T = besarnya pajak yang dikenakan

Tk = besar pajak per unit yang ditanggung oleh consume

- c. Jumlah pajak yang diterima pemerintah merupakan perkalian tarif pajak per unit dengan jumlah keseimbangan setelah pajak. Jumlah pajak yang diterima pemerintah dapat dihitung dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$TT = Qe'.T$$

Dimana :

TT = jumlah pajak yang diterima pemerintah

Qe' = jumlah keseimbangan setelah pajak

T = besarnya pajak yang dikenakan

Contoh:

Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P_d = 15 - Q$, sedangkan penawarannya $P_s =$

$3 + 0,5Q$. Barang tersebut dibebankan pajak sebesar 3 per unit barang. Tentukan :

- Harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sebelum pajak
- Harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sesudah pajak
- Beban pajak per unit yang ditanggung konsumen
- Beban pajak per unit yang ditanggung produsen
- Total pajak yang diterima pemerintah

Penyelesaian:

Diketahui :

$$P_d = 15 - Q$$

$$P_s = 3 + 0,5Q$$

$$T = 3$$

Maka:

- Keseimbangan sebelum pajak

$$P_d = P_s$$

$$15 - Q = 3 + 0,5Q$$

$$-1,5Q = -12$$

$$Q = 8 \rightarrow Q_e = 8$$

Substitusi nilai $Q = 8$ ke salah satu persamaan

$$P = 15 - 8$$

$$P = 7 \rightarrow P_e = 7$$

Jadi titik E (8,7)

b. Keseimbangan sesudah pajak

$$P'_d = P_d$$

$$P'_d = 15 - Q$$

$$P'_s = P_s + T$$

$$P'_s = 3 + 0,5Q + 3$$

$$P'_s = 6 + 0,5Q$$

$$P'_d = P'_s$$

$$15 - Q = 6 + 0,5Q$$

$$-1,5Q = -9$$

$$Q = 6 \rightarrow Q'_e = 6$$

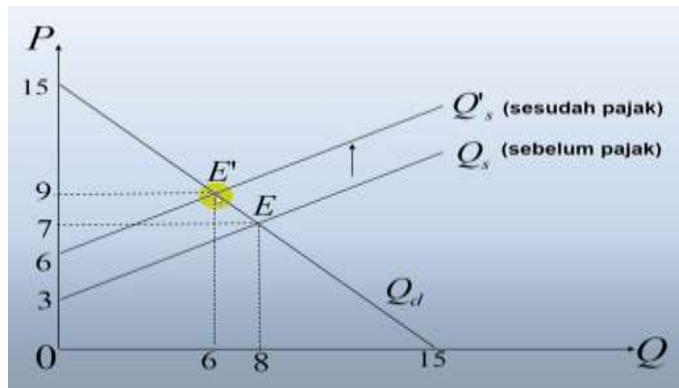
Substitusi nilai $Q = 6$ ke salah satu persamaan

$$P = 15 - 6$$

$$P = 9 \rightarrow P'_e = 9$$

Jadi titik E' (6,9)

Kurva yang akan terbentuk adalah sebagai berikut:



c. Pajak yang ditanggung konsumen

$$Tk = Pe' - Pe$$

$$Tk = 9 - 7$$

$$Tk = 2$$

d. Pajak yang ditanggung produsen

$$Tp = T - Tk$$

$$Tp = 3 - 2$$

e. Total pajak yang diterima pemerintah

$$TT = Qe' \cdot T$$

$$TT = 3 \cdot (6)$$

$$TT = 18$$

3. Pengaruh Pajak Proporsional terhadap Keseimbangan Pasar

Selain pajak per unit yang jumlahnya atau besarnya tetap, pemerintah juga dapat mengenakan pajak proporsional terhadap harga barang yang sudah ditetapkan oleh produsen. Pajak proporsional merupakan pajak yang besarnya diterapkan berdasarkan presentase tertentu dari harga jual dan bukan diterapkan secara spesifik per unit barang. Tarif pajak proporsional ini menggunakan persentase tetap pada pengenaan pajak. Sehingga walaupun nilai objek pajaknya naik, maka tidak akan mempengaruhi nilai persentase yang akan dibayar. Misalnya pajak restaurant yang kita kenal 10% merupakan system pajak proporsional. Jika penawaran semula $P = a + bQ$ (atau $Q = -\frac{a}{b} + \frac{1}{b}P$) maka dengan dikenakannya pajak proporsional sebesar $t\%$ dari harga jual, persamaan penawaran yang baru akan menjadi :

$$P = a + bQ + tP \quad t = \text{pajak proporsional (dalam \%)}$$

$$P - tP = a + bQ$$

$$(1 - t)P = a + bQ$$

$$P = \frac{a}{(1-t)} + \frac{b}{(1-t)}Q \quad \text{atau} \quad Q = -\frac{a}{b} + \frac{(1-t)}{b}P$$

Contoh:

Suatu perusahaan makanan memiliki fungsi permintaan $P = 15 - Q$ dan fungsi penawarannya $P = 3 + 0,5Q$.

Pemerintah menetapkan pajak sebesar 25% terhadap produk dari perusahaan tersebut. Tentukan :

- a. Berapa harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah kena pajak?
- b. Berapa besar pajak per unit yang ditanggung oleh konsumen?
- c. Berapa besar pajak per unit yang ditanggung oleh produsen?
- d. Berapa besar penerimaan pajak total pemerintah?

Penyelesaian:

Diketahui :

- a. Keseimbangan pasar sebelum pajak

$$\text{Permintaan} : P = 15 - Q \rightarrow Q = 15 - P$$

$$\text{Penawaran} : P = 3 + 0,5Q \rightarrow Q = -6 + 2P$$

$$Q_d = Q_s$$

$$15 - P = -6 + 2P$$

$$15 + 6 = 2P + P$$

$$21 = 3P$$

$$P = 7$$

Substitusi nilai $P = 7$ ke salah satu persamaan

$$Q = 15 - P$$

$$Q = 15 - 7$$

$$Q = 8$$

Jadi keseimbangan pasar sebelum pajak terjadi pada titik E (8,7)

b. Keseimbangan pasar sesudah pajak

$$\text{Permintaan (tetap)} : P = 15 - Q \rightarrow Q = 15 - P$$

Penawaran sesudah pajak $t = 25\%$

$$P = 3 + 0,5Q + 25\%P$$

$$P = 3 + 0,5Q + 0,25P$$

$$P - 0,25P = 3 + 0,5Q$$

$$0,75P = 3 + 0,5Q$$

$$P = 4 + \frac{2}{3}Q \quad \text{atau} \quad Q = -6 + 1,5P$$

Keseimbangan pasar

$$Q_d = Q_s$$

$$15 - P = -6 + 1,5P$$

$$15 + 6 = 1,5P + P$$

$$21 = 2,5P$$

$$P = \frac{21}{2,5}$$

$$P'_e = 8,4 \quad \text{dan} \quad Q'_e = 6,6$$

Jadi keseimbangan setelah pajak terjadi pada titik $E'(6,6;8,4)$

Pajak yang dikenakan oleh pemerintah dari setiap unit barang adalah $T \times Pe' = 0,25 \times 8,4 = 2,1$

c. Beban pajak yang ditanggung konsumen (Tk)

$$Tk = Pe' - Pe$$

$$Tk = 8,4 - 7$$

$$Tk = 1,4 \text{ (atau 67\%)}$$

d. Beban pajak yang ditanggung produsen (Tp)

$$Tp = T - Tk$$

$$Tp = 2,1 - 1,4$$

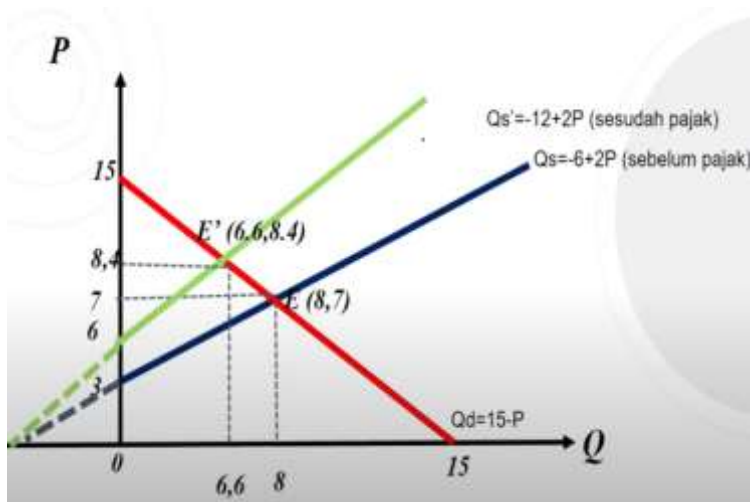
$$Tp = 0,7 \text{ (atau 33\%)}$$

e. Total pajak yang diterima pemerintah (TT)

$$TT = Qe' \times T$$

$$TT = 6,6 \times 2,1$$

$$TT = 13,86$$



4. Pengaruh Subsidi Terhadap Keseimbangan Pasar

Jika pajak akan meningkatkan harga maka subsidi akan menurunkan tingkat harga di pasaran. Kebijakan pemerintah memberikan subsidi bertujuan supaya produsen dapat menjual barangnya dengan harga yang lebih rendah dari harga yang seharusnya. Sehingga pemerintah memberikan subsidi produksi untuk suatu barang memberi dampak harga jual barang tersebut menjadi lebih murah. Dengan adanya subsidi, produsen merasa biaya produksinya menjadi lebih kecil dan menjual barangnya lebih murah. Hal ini akan mengakibatkan fungsi penawaran bergeser menuju arah kanan bawah sehingga dengan jumlah barang yang sama produsen mampu mengenakan harga baru yang lebih rendah dari yang sebelumnya. Subsidi dapat bersifat spesifik dan proporsional.

a. Subsidi yang dinikmati oleh konsumen

$$Sk = P_e - P'_e$$

Dimana :

Sk : subsidi yang diterima konsumen

Pe : harga keseimbangan sebelum subsidi

Pe' : harga keseimbangan setelah subsidi

b. Subsidi yang dinikmati produsen

$$Sp = S - Sk$$

Dimana :

Sp : subsidi yang diterima oleh konsumen

S : selisih antara besar subsidi per unit barang

Sk : subsidi yang dinikmati oleh konsumen

c. Jumlah subsidi yang dibayarkan pemerintah

$$TS = Q'_e \cdot S$$

Dimana :

TS : besar total subsidi yang diberikan oleh pemerintah

Qe' : jumlah barang yang terjual sesudah disubsidi

S : besar subsidi per unit barang

Contoh:

Suatu pabrik mobil memiliki fungsi permintaan $Q_d = 12 - 2P$ dan fungsi penawarannya $Q_s = -4 + 2P$. Pemerintah memberikan subsidi sebesar 2 setiap unit barang. Tentukan:

- Berapakah jumlah dan harga keseimbangan sebelum dan subsidi?
- Berapakah besar subsidi yang dinikmati oleh konsumen?
- Berapakah besar subsidi yang dinikmati oleh produsen?
- Berapakah besar jumlah subsidi yang diberikan oleh pemerintah?

Penyelesaian:

Diketahui :

$$Q_d = 12 - 2P$$

$$Q_s = -4 + 2P$$

$$S = 2$$

- Keseimbangan pasar sebelum subsidi

$$Q_d = Q_s$$

$$12 - 2P = -4 + 2P$$

$$12 + 4 = 2P + 2P$$

$$16 = 4P$$

$$P = 4$$

Substitusi nilai $P = 4$ ke salah satu persamaan

$$Q = 12 - 2P$$

$$Q = 12 - 2(4)$$

$$Q = 12 - 8$$

$$Q = 4$$

Jadi keseimbangan pasar sebelum subsidi terjadi pada titik (4,4)

Keseimbangan pasar sesudah subsidi

$$Q_d = 12 - 2P \rightarrow P = 6 - 0,5Q$$

$$Q_s = -4 + 2P \rightarrow 2P = 4 + 2Q \text{ (sebelum subsidi)}$$

$$P = 2 + 0,5Q$$

$$P = 2 + 0,5Q - 2$$

$$P = 0,5Q \text{ (setelah subsidi)}$$

Maka:

$$P_d = P_s - S$$

$$6 - 0,5Q = 0,5Q$$

$$6 = 0,5Q + 0,5Q$$

$$Q = 6$$

Substitusi nilai $Q = 6$ ke persamaan

$$P = 0,5Q$$

$$P = 0,5(6)$$

$$P = 3$$

Jadi keseimbangan pasar setelah adanya subsidi adalah (6,3)

b. Besar subsidi yang dinikmati konsumen

$$Sk = P_e - P'_e$$

$$Sk = 4 - 3$$

$$Sk = 1$$

c. Besar subsidi yang dinikmati produsen

$$Sp = S - Sk$$

$$Sp = 2 - 1$$

$$Sp = 1$$

d. Besar subsidi yang diberikan oleh pemerintah

$$TS = Q'_e \cdot S$$

$$TS = 6 \cdot 2$$

$$TS = 12$$

5. Fungsi Biaya

Biaya merupakan segala pengorbanan yang dikeluarkan seseorang demi mendapatkan sesuatu yang diinginkan. Fungsi biaya merupakan hubungan antara biaya dengan jumlah produksi yang dihasilkan. Kurva dari fungsi biaya menggambarkan titik-titik kemungkinan besarnya biaya dalam berbagai tingkatan produksi. Biaya total (*total cost*) suatu perusahaan merupakan gabungan dari biaya tetap (*fixed cost*) dan biaya variabel (*variabel cost*), dimana biaya tetap merupakan sebuah konstanta dan biaya variabel tergantung pada jumlah outputnya.

Dalam membahas fungsi biaya ada beberapa macam biaya yang perlu diketahui, yaitu:

a. Biaya Tetap (F_c)

Biaya tetap merupakan biaya yang dikeluarkan perusahaan namun tidak tergantung pada jumlah produk yang dihasilkan.

b. Biaya Variabel (V_c)

Biaya variabel merupakan biaya yang berubah tergantung pada jumlah produk yang dihasilkan.

c. Biaya Total (T_c)

Biaya total merupakan penjumlahan antara biaya tetap dengan biaya variabel.

d. Biaya Tetap Rata-Rata

Biaya tetap rata-rata merupakan biaya tetap yang dibebankan pada satu unit produk.

e. Biaya Variabel Rata-Rata

Biaya variabel rata-rata merupakan biaya yang dibebankan pada satu unit produk.

f. Biaya Rata-Rata

Biaya yang dikeluarkan untuk menghasilkan tiap unit produk.

g. Biaya Marjinal

Biaya marjinal merupakan biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk.

Rumus Dasar:

Biaya tetap	: $FC = k$ (konstanta)
Biaya variabel	: $VC = f(Q)$
Biaya total	: $TC = FC + VC = k + f(Q)$
Biaya tetap rata-rata	: $AFC = \frac{FC}{Q}$
Biaya variabel rata-rata	: $AVC = \frac{VC}{Q}$
Biaya Rata-Rata	: $AC = \frac{TC}{Q} = AFC + AVC$
Biaya Marjinal	: $MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$

Contoh Soal:

Sebuah perusahaan mobil listrik memiliki persamaan biaya sebagai berikut $TC = 2Q^2 - 24Q + 102$.

Tentukan:

- Pada tingkat produksi berapa unit agar biaya total minimum?
- Hitunglah besarnya biaya total minimum berdasarkan unit produk yang dihasilkan!
- Hitung pula besarnya: biaya tetap, biaya variabel, biaya rata-rata, biaya tetap rata-rata, biaya variabel rata-rata.
- Jika produksi dinaikkan dua unit, hitung berapa besarnya biaya marjinal!

Penyelesaian:

$$TC = 2Q^2 - 24Q + 102. \rightarrow a = 2, b = -24, c = 102$$

$$a. Q = \frac{-b}{2a}$$

$$Q = \frac{-(-24)}{2(2)}$$

$$Q = \frac{24}{4} = 6$$

- Substitusi nilai $Q = 6$ ke persamaan TC

$$TC = 2Q^2 - 24Q + 102$$

$$TC = 2(6)^2 - 24(6) + 102$$

$$TC = 72 - 144 + 102$$

$$TC = 30$$

c. Biaya Tetap

$$TC = 2Q^2 - 24Q + 102$$

$$FC = K = 102$$

Biaya Variabel ($Q = 6$)

$$VC = 2Q^2 - 24Q$$

$$VC = 2(6)^2 - 24(6)$$

$$VC = -72$$

Biaya Rata-rata

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

$$AC = \frac{30}{6}$$

$$Q = 5$$

Biaya tetap rata-rata

$$AFC = \frac{FC}{Q}$$

$$AFC = \frac{102}{6}$$

$$AFC = 17$$

Biaya variabel rata-rata

$$AVC = \frac{VC}{Q}$$

$$AVC = \frac{-72}{6}$$

$$AVC = -12$$

d. Biaya marginal jika produksi dinaikkan 2 unit, maka

$$Q = 6 + 2 = 8$$

$$TC = 2Q^2 - 24Q + 102$$

$$TC = 2.(8)^2 - 24(8) + 102$$

$$TC = 38$$

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$$

$$MC = \frac{38-30}{8-6}$$

$$MC = \frac{8}{2}$$

$$MC = 4$$

6. Fungsi Penerimaan

Penerimaan sebuah perusahaan dari hasil penjualan barangnya merupakan fungsi dari jumlah barang yang terjual atau yang dihasilkan. Semakin banyak barang yang diproduksi dan terjual oleh suatu perusahaan maka akan semakin besar penerimaannya. Penerimaan total (total revenue) merupakan hasil kali jumlah produk yang terjual dengan harga jual produk tersebut.

$$TR = P \times Q$$

Contoh:

Harga jual sebuah piring yang dihasilkan oleh sebuah perusahaan adalah Rp 5.000,00 per unit. Tunjukkan persamaan dan kurva penerimaan total perusahaan piring tersebut! Berapa besar penerimaannya apabila terjual piring sebanyak 200 unit?

Penyelesaian:

Diketahui :

$$P = 5.000$$

Maka fungsi penerimaannya

$$TR = Q \times P$$

$$TR = Q \times 5.000$$

$$TR = 5.000Q$$

Penerimaan pada saat $Q = 200$

$$TR = 5.000Q$$

$$TR = 5.000 (200)$$

$$TR = 1.000.000$$

7. Analisis Pulang Pokok (Break Event Point)

Pulang pokok (break event point) merupakan keadaan suatu usaha ketika tidak memperoleh

keuntungan dan tidak mengalami kerugian. Analisis pulang pokok (break event point) yaitu suatu konsep yang digunakan untuk menganalisis jumlah minimum produk yang harus dihasilkan atau terjual agar perusahaan tidak mengalami kerugian.

Keuntungan dan kerugian sebuah perusahaan merupakan selisih dari total penerimaan (total revenue) dengan total biaya (total cost).

$$\pi = TR - TC$$

a. Keuntungan atau laba

Perusahaan memperoleh keuntungan ($\pi > 0$) apabila total penerimaan melebihi total biaya yang dikeluarkan ($TR > TC$).

b. Rugi

Suatu perusahaan mengalami kerugian ($\pi < 0$) apabila total penerimaan lebih kecil dari total biaya yang dikeluarkan ($TR < TC$).

c. Pulang pokok

Perusahaan akan mengalami pulang pokok (break event point, $\pi = 0$) apabila total penerimaan sama dengan total biaya yang dikeluarkan ($TR = TC$).

Contoh:

Apabila biaya total yang dikeluarkan perusahaan yang memproduksi boneka ditunjukkan oleh persamaan $TC = 10.000 + 200Q$ dan penerimaan totalnya $TR = 300Q$. Pada tingkat produksi berapa unit perusahaan tersebut berada pada posisi pulang pokok? Apa yang akan terjadi jika perusahaan tersebut memproduksi boneka sebanyak 500 unit?

Penyelesaian :

Diketahui :

$$TC = 10.000 + 200Q$$

$$TR = 300Q$$

Jumlah produksi BEP

Syarat BEP : $TR = TC$

$$300Q = 10.000 + 200Q$$

$$300Q - 200Q = 10.000$$

$$100Q = 10.000$$

$$Q = \frac{10.000}{100}$$

$$Q_{BEP} = 100$$

Untung atau rugi apabila $Q = 500$

$$\pi = TR - TC$$

$$\pi = 300Q - (10.000 + 200Q)$$

$$\pi = 300Q - 10.000 - 200Q$$

$$\pi = 100Q - 10.000$$

substitusi nilai Q = 500 , sehingga

$$\pi = 100(500) - 10.000$$

$$\pi = 50.000 - 10.000$$

$$\pi = 40.000$$

Karena nilai $\pi > 0$ maka perusahaan tersebut mengalami laba sebesar 40.000 pada saat memproduksi barang 500 unit.

8. Fungsi Anggaran

Fungsi anggaran merupakan suatu garis yang menunjukkan berbagai kombinasi input maupun output yang dapat dibeli dengan harga-harga yang berlaku dengan seluruh biaya yang tersedia. Fungsi anggaran sendiri tergambar dalam teori produksi dan teori konsumsi. Pada teori produksi, fungsi anggaran menggambarkan kemampuan produsen membeli dua input atau lebih dan ditentukan oleh dana yang dimiliki dan harga input. Sedangkan pada teori konsumsi, fungsi anggaran menggambarkan batas maksimum kemampuan seorang konsumen membeli dua produk atau lebih yang ditentukan oleh pendapatan dan harga produk.

Bentuk umum dari fungsi anggaran adalah sebagai berikut:

$$M = x \cdot P_x + y \cdot P_y$$

Dimana :

M = jumlah dana/ pendapatan produsen atau konsumen

x = jumlah masukan atau keluaran x

y = jumlah masukan atau keluaran y

P_x = harga x per unit

P_y = harga y per unit

Contoh:

Buatlah persamaan anggaran seorang konsumen untuk barang x dan y jika pendapatannya Rp 300.000,00 per hari. Harga barang x sebesar Rp 10.000,00 dan barang y sebesar Rp 5.000,00.

- a. Jika semua anggaran untuk membeli barang x , berapa unit yang dapat dibeli?
- b. Jika anggaran untuk membelu barang x 15 unit, berapa unit barang y yang dapat dibeli?

Penyelesaian:

Diketahui:

$$M = 300.000; P_x = 10.000; P_y = 5.000$$

Maka fungsi anggarannya

$$M = x.P_x + y.P_y$$

$$300.000 = 10.000x + 5.000y$$

a. Jika hanya x yang dibeli, maka $y = 0$

$$300.000 = 10.000x + 5.000y$$

$$300.000 = 10.000x + 5.000.(0)$$

$$300.000 = 10.000x$$

$$x = \frac{300.000}{10.000}$$

$$x = 30 \text{ unit}$$

b. Jumlah unit barang y jika $x = 15$

$$300.000 = 10.000x + 5.000y$$

$$300.000 = 10.000.(15) + 5.000y$$

$$300.000 = 150.000 + 5.000y$$

$$300.000 - 150.000 = 5.000y$$

$$5.000y = 150.000$$

$$y = \frac{150.000}{5.000}$$

$$y = 30 \text{ unit}$$

9. Fungsi Konsumsi dan Tabungan

Dalam perekonomian pendapatan nasional masyarakat suatu negara terbagi menjadi dua yaitu

konsumsi dan tabungan. Besar kecilnya tabungan dan konsumsi dipengaruhi oleh besarnya pendapatan. Pendapatan merupakan balas jasa yang diterima selama satu tahun atau satu bulan (Y). Konsumsi merupakan kegiatan mengurangi nilai guna suatu barang maupun jasa dengan tujuan sebagai pemenuhan kebutuhan (C). Sedangkan tabungan merupakan bagian dari pendapatan yang tidak dibelanjakan atau disimpan (S). Alat yang digunakan untuk melakukan konsumsi adalah dengan menggunakan pendapatan, maka konsumsi juga dapat diartikan sebagai bagian pendapatan masyarakat yang digunakan untuk membeli barang maupun jasa dalam angka memenuhi kebutuhan. Untuk masyarakat yang berpenghasilan kecil maka seluruh pendapatannya akan digunakan untuk keperluan konsumsi saja. Dalam ekonomi makro pendapatan disposable (Y) dialokasikan ke dalam konsumsi (C) dan tabungan (S).

Besar dari tabungan dan konsumsi berbanding lurus dengan pendapatan nasional. Sehingga jika pendapatannya besar maka akan besar pula konsumsi dan tabungannya. Hal ini juga berlaku sebaliknya jika pendapatan berkurang maka besar konsumsi dan tabungannya juga akan berkurang. Bentuk umum dari rumus fungsi konsumsi dan fungsi tabungan adalah sebagai berikut.

a. Fungsi Konsumsi

$$C = f(Y) = C_o + cY$$

b. Fungsi Tabungan

$$S = g(Y) = S_o + sY$$

atau

$$S = g(Y) = -C_o + sY$$

C_o adalah konsumsi otonom yaitu besaran konsumsi pada saat konsumen tidak memiliki pendapatan. c atau MPC (*Marginal Propensity to Consume*) merupakan persentase pendapatan yang dikonsumsi. S_o merupakan tabungan otonom. s atau MPS (*Marginal Propensity to Save*) merupakan bagian pendapatan yang ditabung. Sehingga kalau kita jumlah MPC dan MPS akan menghasilkan 1 ($MPC + MPS = 1$).

Contoh:

Pak Aldebaran pada tahun 2020 mengeluarkan dana untuk konsumsi yang ditunjukkan oleh persamaan $C = 60 + 0,5Y$. Bagaimana fungsi tabungannya? Berapakah besar konsumsinya jika tabungan sebesar 30!

Penyelesaian:

Diketahui:

$C = 60 + 0,5Y$, maka fungsi tabungannya

$$Y = C + S$$

$$Y = 60 + 0,5Y + S$$

$$S = -60 + (1 - 0,5)Y$$

$$S = -60 + 0,5Y$$

Jika $S=30$, maka

$$S = -60 + 0,5Y$$

$$30 = -60 + 0,5Y \rightarrow 0,5Y = 60 + 30$$

$$0,5Y = 90$$

$$Y = 180, \text{ sehingga}$$

$$Y = C + S$$

$$90 = C + 30$$

$$C = 90 - 30$$

$$C = 60$$

10. Fungsi Investasi

Investasi merupakan pengeluaran untuk kegiatan produksi atau pada sesuatu dengan harapan memperoleh keuntungan. Investasi juga disebut sebagai kegiatan penanaman modal. Sedangkan investasi dalam kegiatan produksi merupakan investasi yang meliputi input produksi yang digunakan dalam jangka waktu yang relative lama dan dapat digunakan dalam proses produksi. Bentuk umum dari fungsi investasi adalah sebagai berikut:

$$I = I_o - pi$$

Dimana:

I : Investasi

I_o : Investasi otonom

P : proporsi I terhadap i (suku bunga)

Contoh:

Jika permintaan investasi ditunjukkan oleh $I = 800 - 400i$, berapa besar investasi pada bunga bank dengan tingkat 25%?

Penyelesaian:

Diketahui:

$$I = 800 - 400i$$

$i = 25\% = 0,25$, maka substusi nilai i ke fungsi investasi

$$I = 800 - 400(0,25)$$

$$I = 800 - 100$$

$$I = 700$$

C. Latihan

1. Pada saat harga gabah Rp 10.000,00/kg permintaan akan gabah sebanyak 1.000 kg. Akan tetapi pada saat harga gabah Rp 14.000,00 / kg permintaan akan gabah menurun menjadi 600 kg. Buatlah fungsi permintaannya! Berapa jumlah permintaan pada saat harga Rp 15.000,00/ kg dan berapa harga gabah jika permintaannya 800 kg?
2. Permintaan terhadap handphone Samsung pada tingkat 7.500.000/unit. Permintaan terhadap barang tersebut sebanyak 1.000 unit. Apabila harga barang tersebut turun sebesar 2.500.000/ unit, permintaannya bertambah 500 unit. Dari suatu kondisi pasar tersebut buatlah fungsi permintaan barangnya dan berapa jumlah permintaan pada saat harga 4.000.000/ unit.
3. Pada saat harga Rp 4.000,00/ unit sebuah perusahaan mainan menawarkan produksinya sebanyak 150 unit. Tapi jika harga naik menjadi Rp 10.000,00/ unit jumlah produk mainan yang ditawarkan sebanyak 300 unit. Tentukan fungsi penawaran produsen, jumlah barang pada tingkat harga Rp 8.000,00/ unit dan harga barang jika jumlah yang ditawarkan sebanyak 200 unit.
4. PT Fast Bojana menawarkan produknya pada tingkat harga Rp 60.000,00/ unit sebanyak 500 unit. Apabila harga naik menjadi Rp 90.000,00/ unit maka jumlah barang yang ditawarkan naik menjadi 3.000 unit. Dari pernyataan tersebut buatlah fungsi penawarannya!

- Apabila harga barang tersebut ditawarkan sebesar Rp 70.000,00/ unit hitunglah jumlah barang yang ditawarkan.
5. Fungsi permintaan dan fungsi penawaran suatu barang ditunjukkan oleh $P_d = -6Q + 160$ dan $P_s = 4Q + 20$. Hitunglah jumlah dan harga barang pada tingkat keseimbangan pasar dan buat grafiknya!
 6. Pada tingkat harga 140/ unit permintaan konsumen sebanyak 5 unit, jika permintaan konsumen naik sebanyak 20 unit harga turun sebesar 20/ unit. Di pihak produsen menawarkan barangnya sebanyak 10 unit pada tingkat harga 70/ unit, jika harga dinaikkan sebesar 70/ unit jumlah barang yang ditawarkan bertambah sebanyak 30 unit. Hitunglah jumlah dan harga keseimbangan pasarnya!
 7. Fungsi permintaan suatu barang adalah $Q = -0,6P + 75$, sedangkan fungsi penawarannya adalah $Q = 0,3P - 15$. Jika terhadap barang tersebut dibebankan pajak sebesar 15/ unit. Hitunglah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah dibebankan pajak!
 8. Permintaan dan penawaran sebuah gadget ditunjukkan oleh fungsi $P = -4Q + 1.250$ dan $P = 2Q + 50$. Untuk mengurangi beban ekonomi masyarakat, pemerintah memberikan beban pajak terhadap gadget tersebut sebesar 100/unit. Hitunglah pajak yang ditanggung konsumen, pajak yang ditanggung produsen dan total pajaknya!
 9. Permintaan dan penawaran suatu produk kecantikan ditunjukkan oleh fungsi $P = -32Q + 10.000$ dan $Q = P -$

100. Untuk mengurangi beban ekonomi pada masyarakat, pemerintah memberikan subsidi terhadap barang tersebut sebesar 960/ unit. Hitunglah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi! Hitung juga subsidi yang dinikmati oleh konsumen, produsen serta total subsidinya!

10. Diberikan fungsi permintaan $P = -10Q + 250$ dan fungsi penawarannya $P = 8Q + 40$. Jika produsen barang tersebut membagikan produknya secara gratis kepada konsumen, berapa jumlah subsidi yang harus diberikan?
11. Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran dari dua macam produk yang mempunyai hubungan substitusi sebagai berikut:

$$Q_{dx} = 9 - 2P_x + P_y \qquad Q_{sx} = -3 + 2P_x - P_y$$

$$Q_{sy} = -1 - 2P_x + 6P_y \qquad Q_{dy} = 1 + 3P_x - 3P_y$$

Carilah harga dan jumlah keseimbangan pasarnya!

12. Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran dari dua macam produk yang mempunyai hubungan substitusi sebagai berikut:

$$Q_{dx} = 17 - 5P_x + 2P_y \qquad Q_{sx} = -7 + 4P_x - P_y$$

$$Q_{sy} = -23 - 3P_x + 5P_y \qquad Q_{dy} = 4 + 4P_x - 3P_y$$

Carilah harga dan jumlah keseimbangan pasarnya!

13. Biaya tetap untuk memproduksi barang 60.000, untuk memproduksi barang tersebut biaya bertambah untuk setiap unit yang diproduksi sebesar 200. Buatlah fungsi

biaya dan fungsi biaya rata-ratanya! Jika diproduksi 50 unit berapa total biayanya?

14. Biaya total yang dikeluarkan perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $TC = 3Q^2 - 6Q + 4$.
 - a. Pada tingkat produksi berapa unit agar biaya total minimum?
 - b. Hitunglah besarnya biaya total minimum berdasarkan unit produk yang dihasilkan!
 - c. Hitung pula besarnya: biaya tetap, biaya variabel, biaya rata-rata, biaya tetap rata-rata, biaya variabel rata-rata.
 - d. Jika produksi dinaikkan dua unit, hitung berapa besarnya biaya marjinal!
15. Harga jual suatu barang adalah 1.250/unit. Buatlah fungsi penerimaan dan fungsi penerimaan rata-rata! Berapa penerimaannya jika produk tersebut terjual 75 unit?
16. Harga jual produk yang dihasilkan oleh sebuah perusahaan adalah Rp 15.000,00 per unit. Tunjukkan persamaan dan kurva penerimaan total perusahaan! Berapa besar penerimaannya apabila terjual barang sebanyak 300 unit?
17. Apabila biaya total yang dikeluarkan perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $TC = 6.000 + 20Q$ dan penerimaan totalnya $TR = 20Q$. Pada tingkat produksi berapa unit perusahaan tersebut berada pada posisi pulang pokok? Apa yang akan terjadi jika perusahaan tersebut memproduksi barang sebanyak 100 unit?

18. Buatlah persamaan anggaran seorang konsumen untuk barang x dan y jika pendapatannya Rp 500.000,00 per hari. Harga barang x sebesar Rp 5.000,00 dan barang y sebesar Rp 8.000,00.
- Jika semua anggaran untuk membeli barang x , berapa unit yang dapat dibeli?
 - Jika anggaran untuk membeli barang x 25 unit, berapa unit barang y yang dapat dibeli?
19. Pada hasil survey tahun 2020 pada suatu wilayah, pendapatan buruh sebesar Rp 3.000.000,00/ bulan dengan tingkat konsumsi Rp 2.500.000,00/ bulan. Lima tahun berikutnya dilakukan survey kembali dan ternyata pendapat buruh tersebut meningkat menjadi Rp 3.500.000,00/ bulan dengan tingkat konsumsi Rp 2.900.000,00/ bulan. Dari data tersebut buatlah fungsi konsumsi dan fungsi tabungan! Hitung pula tingkat keseimbangan pendapatan, konsumsi dan tabungan jika pendapatan Rp 4.000.000,00/ bulan!
20. Pak Chandra pada tahun 2021 mengeluarkan dana untuk konsumsi yang ditunjukkan oleh persamaan $C = 150 + 4Y$. Bagaimana fungsi tabungannya? Berapakah besar konsumsinya jika tabungan sebesar 50!
21. Diketahui pendapatan Pak Canggih beserta konsumsi dan tabungannya sebagai berikut:
- Pada saat pendapatan per bulan Rp 10.000.000,00 besar konsumsi per bulan adalah Rp 5.500.000,00 sehingga tabungannya Rp 4.500.000,00.
 - Pada tingkat pendapatan

22. Jika permintaan investasi ditunjukkan oleh $I = 4000 - 250i$, berapa besar investasi pada bunga bank dengan tingkat 30%?

D. Referensi

- Dumairy. (2010) Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, BPFE, Yogyakarta
- Hamidah, dkk. (2020) Matematika Ekonomi 1 dan 2 untuk Analisa Ekonomi, Bisnis dan Ilmu Sosial. Surabaya : Scopindo Media Pustaka.
- Johannes, dkk. (1982) Pengantar Matematika untuk Ekonomi. Jakarta: LP3ES.
- Markonah dan Hedwigis Esti. (2008) Matematika Ekonomi dan Bisnis 1. Jakarta: PT. Gramedia
- Mesra, B. (2016) Penerapan Ilmu Matematika dalam Ekonomi dan Bisnis. Yogyakarta: CV Budi Utama.
- Olivier, J. (2017) Business Math: A Step by Step Handbook. Canada: Creative Commons License (CC BY-NC-SA).
- Putrodjoyo G dan Untung Rahardja. (2015) Matematika Ekonomi. Jakarta: PT. Grasindo.
- Rifa'i Rusdian. (2016) Aljabar Matriks Dasar. Yogyakarta: Deepublish.

Rinaldi. (2020). Buku Ajar Matematika Ekonomi. Jakarta: FEB
Universitas Persada Indonesia.

Sessu, A. (2017) Pengantar Matematika Ekonomi. Jakarta:
PT Bumi Aksara

PERTEMUAN VIII

FUNGSI NON LINEAR

A. Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini diharapkan mahasiswa mampu :

1. Memahami bentuk umum fungsi non linear.
2. Menghitung bentuk fungsi non linear dengan berbagai metode penyelesaian fungsi non linear.
3. Membandingkan bentuk metode penyelesaian fungsi non linear.
4. Menggambar grafik fungsi non linear.

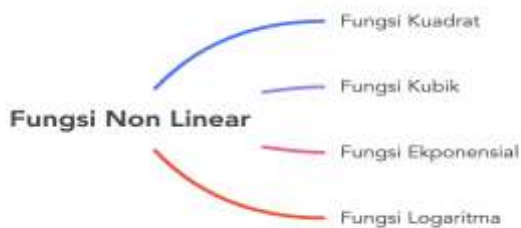
B. Materi

FUNGSI NON LINEAR

Fungsi non linear merupakan salah satu bagian yang penting dalam matematika ekonomi dikarenakan pada umumnya fungsi-fungsi yang menghubungkan variabel-variabel ekonomi berbentuk non linear. Maka dari itu dengan mempelajari bentuk-bentuk dari fungsi non linear dan memahami sifat-sifatnya akan bermanfaat untuk mendalami teori-teori ekonomi. Secara definisi fungsi non linear adalah fungsi dimana pangkat tertinggi dari variabel-variabel yang

membentuknya tidak sama dengan satu. Artinya dalam sebuah fungsi dimana variabelnya ada salah satu atau bahkan semua variabelnya berpangkat tidak sama dengan satu maka fungsi tersebut adalah fungsi non linear.

Fungsi non linear adalah lawan dari fungsi linear. Fungsi non linear sendiri merupakan fungsi yang banyak sekali diaplikasikan dalam ekonomi dikarenakan lebih mendekati pada keadaan yang real atau nyata. Untuk melihat apakah sebuah fungsi itu linear atau non linear, cara mudahnya adalah dengan menggambarkan fungsi tersebut dalam system koordinat. Apabila fungsi tersebut menghasilkan garis yang tidak lurus maka kita bias menyimpulkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi non linear, karena fungsi linear jika digambarkan dalam system koordinat akan menghasilkan garis lurus. Beberapa fungsi non linear adalah sebagai berikut:



Gambar 8. 1 Fungsi Non Linear

Diantara ke empat fungsi non linear tersebut yang paling sering digunakan adalah fungsi kuadrat.

1. Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat adalah fungsi dimana pangkat tertinggi dari variabelnya adalah dua. Apabila sebuah fungsi pangkat tertinggi dari variabelnya adalah dua maka dapat disimpulkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi kuadrat. Secara umum fungsi kuadrat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y = a + bx + cx^2, \text{ dimana } c \neq 0$$

Dimana :

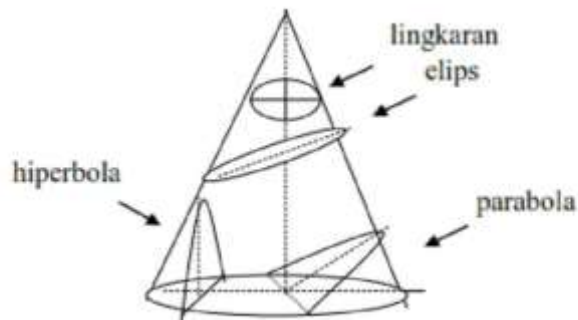
x : variabel bebas

y : variabel terikat

a dan b : koefisien dan $a \neq 0$

c : konstanta

Dalam Dumairy (2010: 126) Fungsi kuadrat ini jika digambarkan dalam sistem koordinat maka akan menghasilkan kemungkinan sebagai berikut.



Gambar 8. 2 Fungsi Kuadrat

Apabila sebuah bidang kerucut dipotong dengan posisi datar, maka akan diperoleh potongan yang berbentuk lingkaran. Apabila dipotong dengan posisi menyerong, maka menghasilkan potongan berbentuk elips. Apabila dipotong dengan posisi tegak lurus, maka menghasilkan potongan berbentuk hiperbola. Sedangkan jika dipotong dengan posisi menyerong pada setengah bidang kerucut, maka akan menghasilkan potongan yang berbentuk parabola. Dengan demikian kurva dari sebuah persamaan kuadrat akan berbentuk salah satu dari empat kemungkinan tersebut. Fungsi kuadrat parabola adalah fungsi yang paling digunakan dalam ekonomi.

Untuk mengetahui apakah suatu persamaan itu merupakan lingkaran, elips, hiperbolik atau parabolik, maka harus diidentifikasi persamaan kuadratnya terlebih dahulu. Secara umum bentuk dari persamaan kuadrat adalah:

$$ax^2 + by^2 + pxy + cx + dy + e = 0$$

Dari persamaan kuadrat di atas dapat diketahui apakah merupakan lingkaran, elips, hiperbolik atau parabolic tergantung besaran nilai p atau koefisien perkalian antara perkalian x dan y , besaran dari b atau koefisien y^2 ataupun koefisien a atau koefisien x^2 . Gambar atau kurva dari persamaannya :

- a. Jika $p = 0$ dan $a = b \neq 0$, maka kurvanya adalah lingkaran

Misalkan : $3x^2 + 3y^2 + 4x - y + 20 = 0$

Terlihat jika persamaan tersebut tidak ditemukan variabel x dan y yang berarti nilai p nya adalah 0. Nilai a dari persamaan tersebut adalah 3 dan nilai b dari persamaan tersebut juga 3. Maka dapat diperoleh $a = b \neq 0$, sehingga persamaan tersebut merupakan lingkaran.

- b. Jika $p^2 - 4ab < 0$, maka kurvanya adalah elips

Misalkan : $x^2 + 3y^2 - xy + 2x + y = 0$

Dari persamaan tersebut dapat diketahui bahwa nilai $a = 1$, $b = 3$ dan $p = -1$, maka:

$$p^2 - 4ab < 0$$

$$(-1)^2 - 4(1)(3) < 0$$

$$-11 < 0$$

Karena nilai dari $p^2 - 4ab = -11$ dan kurang dari 0, maka persamaan tersebut adalah elips.

- c. Jika $p^2 - 4ab > 0$, maka kurvanya adalah hiperbola

Misal : $x^2 - 2y^2 + 4xy + 5x + 2y + 10 = 0$

Dari persamaan tersebut dapat diketahui bahwa nilai $a = 1$, $b = -2$ dan $p = 4$, maka :

$$p^2 - 4ab > 0$$

$$4^2 - 4(1)(-2) > 0$$

$$24 > 0$$

Karena nilai $p^2 - 4ab = 24$, dan lebih dari 0, maka persamaan tersebut adalah hiperbola.

d. Jika $p^2 - 4ab = 0$, maka kurvanya adalah parabola

$$\text{Misal : } 2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x - 2y + 8 = 0$$

Dari persamaan tersebut dapat diketahui bahwa nilai $a = 2$, $b = 2$ dan $p = 4$, maka :

$$p^2 - 4ab = 0$$

$$4^2 - 4(2)(2) = 0$$

$$0 = 0$$

Karena nilai $p^2 - 4ab = 0$ maka persamaan tersebut adalah parabola.

Apabila $p = 0$ atau bisa dibilang persamaan kuadrat tersebut tidak mengandung variabel xy maka bentuk umumnya menjadi :

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

Cara mengidentifikasi apakah persamaan tersebut merupakan lingkaran, elips, hiperbola atau parabola adalah :

a. Jika $a = b \neq 0$, maka persamaan tersebut adalah lingkaran

$$\text{Misal : } x^2 + y^2 + 2x + 3y + 8 = 0$$

Pada persamaan tersebut tidak terdapat variabel xy , tetapi karena nilai $a = b$ maka dapat dipastikan bahwa persamaan tersebut adalah lingkaran.

- b. Jika $a \neq b$, tetapi tandanya sama maka persamaan tersebut adalah elips

$$\text{Misal : } 3x^2 + y^2 + 2x - 2y + 7 = 0$$

Pada persamaan tersebut tidak terdapat variabel xy dan nilai $a = 3$ dan $b = 1$. Walaupun nilai $a \neq b$ tetapi setanda (sama-sama positif) maka persamaan tersebut adalah elips

- c. Jika a dan b tandanya berbeda, maka persamaan tersebut adalah hiperbola

$$\text{Misal : } 2x^2 - 3y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$$

Pada persamaan tersebut tidak terdapat variabel xy dan nilai $a = 2$ dan $b = -3$. Karena berbeda tanda (positif dan negatif) maka persamaan tersebut adalah hiperbola.

- d. Jika $a = 0$ atau $b = 0$, tetapi bukan keduanya maka persamaan tersebut adalah parabola

$$\text{Misal : } x^2 + 5x - y + 10 = 0$$

Jika dilihat persamaan di atas hanya memiliki satu variabel yang berpangkat 2 yaitu variabel x , berarti $a = 1$ dan $b = 0$. Karena salah satu bernilai 0 yaitu $a = 1$ maka persamaan tersebut adalah parabola.

a. Lingkaran

Lingkaran merupakan tempat kedudukan titik-titik pada bidang datar yang mempunyai jarak tetap terhadap titik pusatnya. Jarak antara sebuah titik tertentu terhadap titik pusat disebut jari-jari lingkaran. Secara umum bentuk persamaan lingkaran adalah sebagai berikut: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$. Persamaan tersebut dapat dibawa ke dalam bentuk persamaan sebagai berikut.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Dengan:

$$a = \frac{C}{-2A} \quad ; \quad b = \frac{D}{-2A} \quad \text{dan} \quad r = \sqrt{\left(i^2 + j^2 - \frac{E}{A}\right)}$$

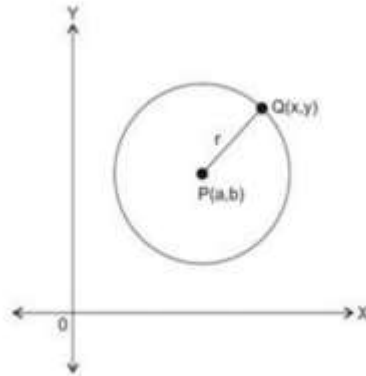
Dimana:

a : jarak pusat lingkaran terhadap sumbu y

b : jarak pusat lingkaran terhadap sumbu x

r : jari-jari lingkaran

Gambar lingkaran tersebut adalah sebagai berikut :



Lingkaran dapat digambarkan jika nilai $r^2 > 0$.
Titik potong lingkaran pada sumbu koordinat dapat dicari dengan memisalkan $x = 0$ dan $y = 0$ secara bergantian.

Apabila $i > r \rightarrow$ lingkaran tidak memotong sumbu y

$j > r \rightarrow$ lingkaran tidak memotong sumbu x

Contoh:

Tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan :

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

Penyelesaian :

Bentuk umum lingkaran

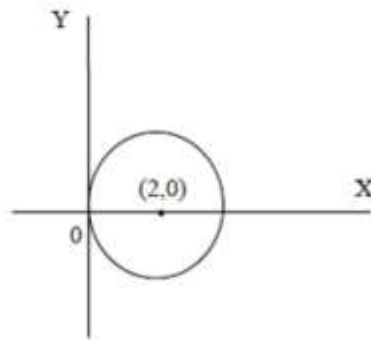
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$x^2 - 4x + y^2 = 0 \rightarrow$ ruas kiri dan ruas kanan masing-masing ditambah 4

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$$

Dari persamaan tersebut dapat diperoleh Titik Pusat (2,0) dan jari-jarinya 2



b. Elips

Elips merupakan tempat kedudukan titik-titik pada bidang datar yang jumlah jaraknya dari dua buah focus selalu konstan. Sebuah elips dibagi secara simetris oleh dua sumbu yang berpotongan saling tegak lurus. Sumbu yang panjang disebut sumbu mayor, sedang sumbu yang pendek disebut sumbu minor. Fokus elips adalah sembarang titik yang terletak pada sumbu elips. Titik potong antara kedua sumbu tersebut disebut pusat elips. Secara umum bentuk persamaan elips adalah sebagai berikut :

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0. \text{ Dimana } A \text{ dan } B$$

tandanya sama, tetapi A tidak sama dengan B. Persamaan di atas dapat ditulis dengan bentuk baku seperti berikut.

$$\frac{(x-a)^2}{r_1^2} + \frac{(y-b)^2}{r_2^2} = 1$$

Pusat elips adalah (a, b) dan apabila $a > b$, maka sumbu mayor sejajar dengan sumbu x. Akan tetapi apabila $a < b$, maka sumbu mayor sejajar dengan sumbu y, r_1 merupakan jari-jari panjang sedangkan r_2 merupakan jari-jari pendek. Dan apabila $r_1 = r_2$ maka akan menjadi lingkaran. Perlu diingat bahwa panjang jari-jari panjang sama dengan setengah sumbu mayor, sedangkan panjang jari-jari pendek adalah setengah sumbu minor.

Contoh :

Diberikan persamaan elips sebagai berikut.

$$9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$$

Tentukan titik pusat elips, jari-jari panjang dan jari-jari pendeknya!

Penyelesaian :

$$9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$$

$$9x^2 + 36x + 16y^2 - 32y = -92$$

$$9(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 2y) = 0$$

$$9\left[\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 16\left[\left(y - \frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] = 92$$

$$9[(x + 2)^2 - 4] + 16[(y - 1)^2 - 1] = 92$$

$$9(x + 2)^2 - 36 + 16(y - 1)^2 - 16 = 92$$

$$9(x + 2)^2 + 16(y - 1)^2 = 92 + 36 + 16$$

$$9(x + 2)^2 + 16(y - 1)^2 = 144 \text{ (masing-masing ruas dibagi 144)}$$

$$\frac{9(x + 2)^2}{144} + \frac{16(y - 1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

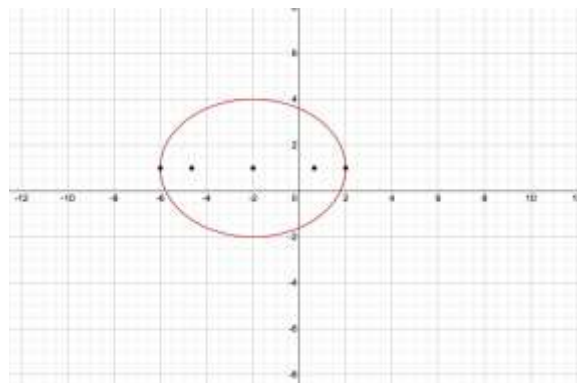
$$\frac{(x + 2)^2}{16} + \frac{(y - 1)^2}{9} = 1$$

Dari persamaan di atas dapat diketahui bahwa

Pusat Elips (-2,1)

$$\text{Jari-jari Panjang} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Jari-jari pendek} = \sqrt{9} = 3$$



c. Hiperbola

Hiperbola merupakan tempat kedudukan titik-titik pada bidang datar yang perbedaan jaraknya terhadap dua focus selalu konstan. Sebuah hiperbola mempunyai dua sumbu yang membagi dua hiperbola secara simetris dan yang memotong hiperbola disebut sumbu *transverse*. Asimtot kurva merupakan suatu garis lurus yang didekati oleh kurva dengan jarak yang semakin dekat dengan nol. Pada suatu hiperbola terdapat dua buah garis asimtot yang saling berpotongan. Titik potong inilah yang disebut sebagai pusat hiperbola. Bentuk umum dari persamaan hiperbola adalah $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, dimana A dan B mempunyai tanda yang berlawanan. Persamaan tersebut dapat dijadikan bentuk baku seperti berikut:

$$\frac{(x-a)^2}{i^2} - \frac{(y-b)^2}{j^2} = 1 \text{ untuk sumbu lintang (transverse)}$$

sejajar sumbu x, atau

$$\frac{(y-b)^2}{j^2} - \frac{(x-a)^2}{i^2} = 1 \text{ untuk sumbu lintang (transverse)}$$

sejajar sumbu y.

Dimana (a,b) merupakan titik pusat hiperbola.

Persamaan untuk asimtot-asimtotnya bisa dicari oleh persamaan :

$$\frac{x-a}{i} = \pm \frac{y-b}{j} \text{ atau } \frac{y-b}{j} = \pm \frac{x-a}{i}$$

Apabila $i = j$, maka kedua asimtotnya akan berpotongan tegak lurus, dan sumbu lintangnya (transverse) tidak lagi sejajar salah satu sumbu koordinat dan hiperbolanya disebut hiperbola sama sisi.

Contoh :

Diberikan persamaan hiperbola sebagai berikut:

$$9x^2 - 16y^2 + 36x - 32y - 122 = 0$$

Tentukan titik pusat dan asimtotnya!

Penyelesaian :

$$9x^2 - 16y^2 + 36x - 32y - 122 = 0$$

$$9x^2 + 36x - 16y^2 - 32y = 122$$

$$9(x^2 + 4x) - 16(y^2 + 2y) = 122$$

$$9\left[\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] - 16\left[\left(y + \frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] = 122$$

$$9[(x + 2)^2 - 4] - 16[(y + 1)^2 - 1] = 122$$

$$9(x + 2)^2 - 36 - 16(y - 1)^2 + 16 = 122$$

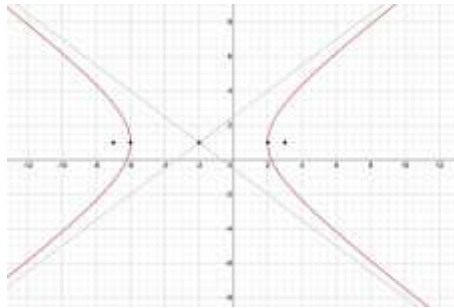
$$9(x + 2)^2 - 16(y - 1)^2 = 122 + 36 - 16$$

$$9(x + 2)^2 - 16(y - 1)^2 = 144 \text{ (masing-masing ruas dibagi dengan 144)}$$

$$\frac{9(x+2)^2}{144} - \frac{16(y-1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

Dari persamaan di atas dapat diketahui bahwa Titik Pusat Hiperbola (2, -1). Karena persamaannya memenuhi rumus baku, berarti sumbu transversenya sejajar dengan sumbu x.

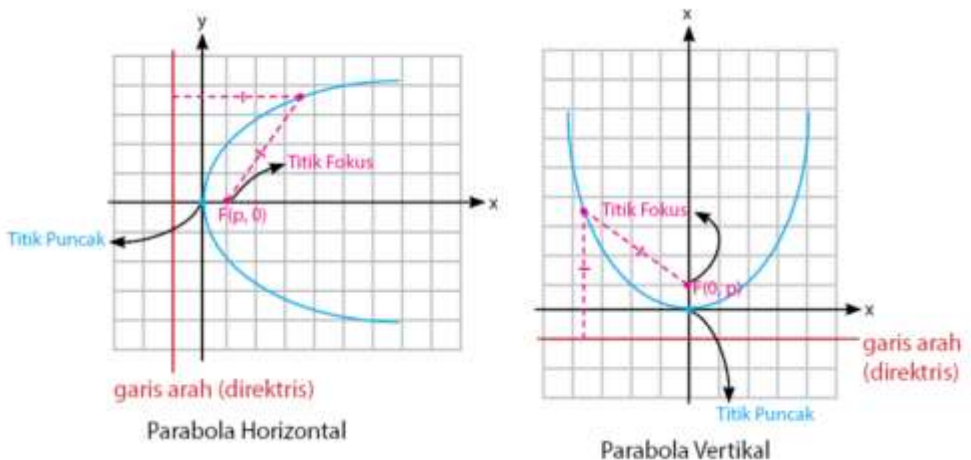


Gambar 8. 3 Titik Pusat Hiperbola

d. Parabola

Selanjutnya pembahasan mendalam akan difokuskan pada parabola karena parabola banyak diaplikasikan dalam ekonomi dan bisnis misalnya pada teori biaya, teori produksi dan beberapa teori lainnya yang menggunakan kurva parabola. Parabola merupakan tempat kedudukan titik-titik pada bidang datar yang mempunyai jarak sama terhadap sebuah titik fokus dan sebuah garis lurus yang disebut direktriks (garis sumbu simetri terhadap titik fokus).

Kurva parabola mempunyai satu sumbu simetri dan satu titik ekstrim atau titik puncak parabola. Sumbu simetri parabola dapat berupa garis vertikal atau garis horizontal. Jika sumbu simetrinya berupa garis vertikal maka kemungkinan parabolanya merupakan parabola terbuka ke atas atau parabola terbuka ke bawah. Sedangkan sumbu simetri horizontal maka kemungkinan parabolanya adalah parabola terbuka ke samping kiri atau parabola terbuka ke samping kanan. Titik ekstrim parabola merupakan titik potong antara sumbu simetris dan kurva parabola.



Bentuk umum dari persamaan parabola adalah $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, dimana salah satu A atau B (tetapi tidak keduanya) sama dengan nol. Dikarenakan terdapat parabola dengan sumbu simetri sejajar sumbu y dan parabola dengan sumbu simetri sejajar sumbu x, maka terdapat dua macam bentuk

umum yang lebih definitive untuk persamaan suatu parabola. Dengan demikian, bentuk persamaan standar parabola adalah :

$y = ax^2 + bx + c$, sumbu simetri sejajar sumbu y
dimana $a \neq 0$

atau

$x = ay^2 + by + c$, sumbu simetri sejajar sumbu x
dimana $a \neq 0$

Parabola dengan sumbu simetri sejajar dengan sumbu y, maka parabolanya akan terbuka ke bawah apabila $a < 0$ dan terbuka ke atas apabila $a > 0$. Parabola dengan sumbu simetri sejajar dengan sumbu x, maka parabolanya akan terbuka ke kanan apabila $a > 0$ dan terbuka ke kiri apabila $a < 0$.

Titik ekstrim parabola (i, j) adalah :

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a} \right)$$

Untuk $x = \frac{-b}{2a}$ dan $y = \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$

Contoh :

Diberikan persamaan parabola $y = -x^2 + 6x - 2$.

Tentukan titik ekstrim dan titik potongnya terhadap sumbu-sumbu koordinatnya!

Penyelesaian :

Dari persamaan parabola $y = -x^2 + 6x - 2$ terdapat satu variabel yang berpangkat dua yaitu variabel x maka sumbu simetrinya sejajar dengan sumbu y .

$$y = -x^2 + 6x - 2 \text{ di dapat nilai } a = -1; b = 6; c = -2$$

1) Titik ekstrim

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(6)}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$y = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{6^2 - 4(-1)(-2)}{-4(-1)} = \frac{36 - 8}{4} = 7$$

Titik ekstrim (3, 7)

2) Titik potong pada sumbu y , misalkan $x = 0$

$$y = -x^2 + 6x - 2 \rightarrow y = -(0)^2 + 6(0) - 2 \\ \rightarrow y = -2$$

3) Titik potong pada sumbu x , misalkan $y = 0$

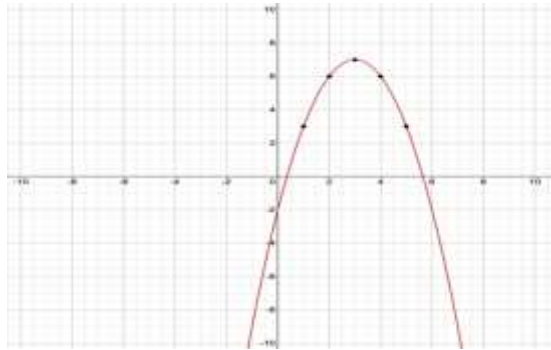
$$y = -x^2 + 6x - 2 \rightarrow -x^2 + 6x - 2 = 0$$

Rumus ABC :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{-2} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm 5,29}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-6+5,29}{-2} = 0,35 \quad \text{dan} \quad x_2 = \frac{-6-5,29}{-2} = 5,64$$



2. Fungsi Kubik

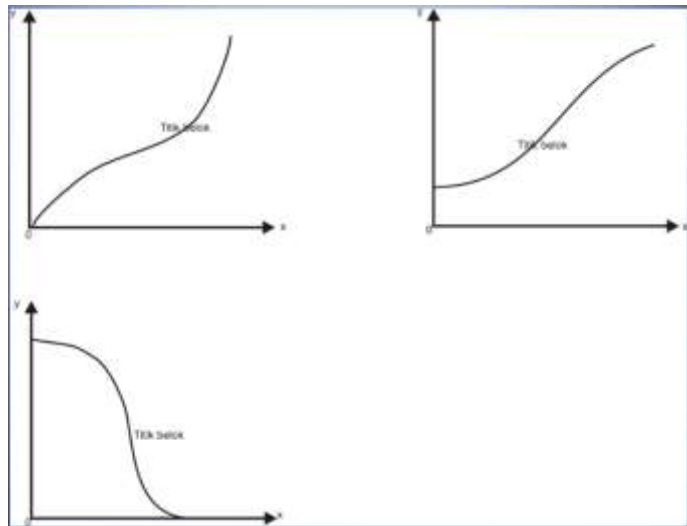
Fungsi kubik atau biasa disebut dengan fungsi berderajat tiga merupakan fungsi yang mempunyai pangkat tertinggi pada variabelnya yaitu pangkat tiga. Bentuk umum dari persamaan fungsi kubik yaitu:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ dengan } a \neq 0$$

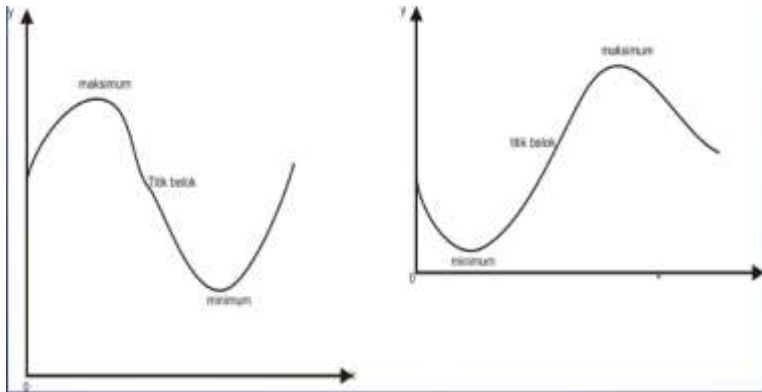
- Fungsi kubik ini apabila digambarkan dalam bidang koordinat Cartesius maka kurvanya mempunyai dua lengkung (*concave*) yaitu lengkung ke atas dan lengkung ke bawah.
- Setiap fungsi kubik setidaknya mempunyai sebuah titik balik (*inflection point*) yaitu peralihan bentuk kurva dari cekung menjadi bentuk kurva cembung atau sebaliknya.
- Selain titik belok sebuah fungsi kubik memungkinkan memiliki satu titik ekstrim dapat berupa maksimum

maupun minimum atau dua titik ekstrim yang dapat berupa maksimum maupun minimum.

- d. Ada atau tidaknya titik ekstrim pada sebuah fungsi kubik tergantung pada besarnya nilai a , b dan c pada persamaannya.



Pada gambar di atas memperlihatkan fungsi-fungsi kubik yang hanya mempunyai titik belok tanpa titik belok ekstrem. Sedangkan gambar di bawah ini memperlihatkan fungsi-fungsi kubik yang mempunyai titik belok dan titik ekstrem. Grafik fungsi pangkat tiga sedikit rumit untuk digambarkan dibandingkan dengan fungsi kuadrat karena untuk menentukan titik-titik ekstremnya sangat membutuhkan pengetahuan kalkulus.



Banyaknya penyelesaian atau akar dari persamaan pangkat tiga tergantung pada berapa kali kurva memotong sumbu x dan kemungkinannya ada satu, dua atau tiga akar.

Perhatikan fungsi kubik berikut ini dan turunan-turunannya serta hubungan mereka secara grafik.

- Fungsi kubik $y = f(x)$ berada pada titik ekstrem maksimum.
- Fungsi $y = f(x)$ berada pada titik minimum.
- Derivative pertama berada pada titik ekstrem (titik minimum).

Contoh:

Tentukan titik maksimum dan titik belok dari persamaan kubik $C = \frac{1}{3}Q^3 - 3Q^2 + 8Q + 5!$

Penyelesaian :

$C = y$ dan $Q = x$ (analogi rumus)

$$C' = 0, \text{ maka } 0 = Q^2 - 6Q + 8$$

$$0 = (Q - 4)(Q - 2)$$

$$Q_1 = 4 \text{ dan } Q_2 = 2$$

$$C'' = 0, \text{ maka } 0 = 2Q - 6$$

$$Q_1 = 4, \text{ maka } 0 = 2(4) - 6 = 2; (2 > 0)$$

Pada $Q_1 = 4$ merupakan titik minimum maka

$$Q_1 = 4 \rightarrow C = \frac{1}{3}(4)^3 - 3(4)^2 + 8(4) + 5$$

$$C = \frac{1}{3}64 - 3(12) + 8(4) + 5$$

$$C = 21,33 - 36 + 32 + 5$$

$$C = 10,33$$

Jadi pada $Q_1 = 4$ titik minimum pada $(4; 10,33)$

$$Q_2 = 2, \text{ pada } C'' = 2(2) - 6 = -2; (-2 < 0)$$

Sehingga pada $Q_2 = 2$ merupakan titik maksimum.

$$Q_2 = 2 \rightarrow C = \frac{1}{3}(2)^3 - 3(2)^2 + 8(2) + 5$$

$$C = \frac{1}{3}(8) - 3(4) + 16 + 5$$

$$C = 2,67 - 12 + 16 + 5$$

$$C = 11,67$$

Mencari titik belok

Titik belok pada saat $C'' = 0$

$$C'' = 2Q - 6$$

$$0 = 2Q - 6$$

$$2Q = 6$$

$$Q = 3$$

Jika $Q = 3$ maka

$$C = \frac{1}{3}(3)^3 - 3(3)^2 + 8(3) + 5$$

$$C = \frac{1}{3}(27) - 3(9) + 24 + 5$$

$$C = 9 - 27 + 24 + 5$$

$$C = 11$$

Titik beloknya adalah (3,11)

3. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial merupakan suatu fungsi yang konstantanya berpangkat variabel bebas. Jika selama ini kita mengenal fungsi variabel yang berpangkat konstanta misalnya x^2, x^3 , maka fungsi eksponensial ini adalah kebalikannya. Bentuk umum sederhana dari fungsi eksponensial adalah :

$$f(x) = y = b^x \quad ; \quad (b > 0, b > 1)$$

Dimana :

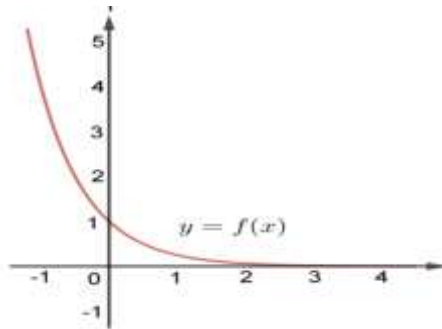
b : bilangan basis (bilangan pokok)

x : variabel bebasnya

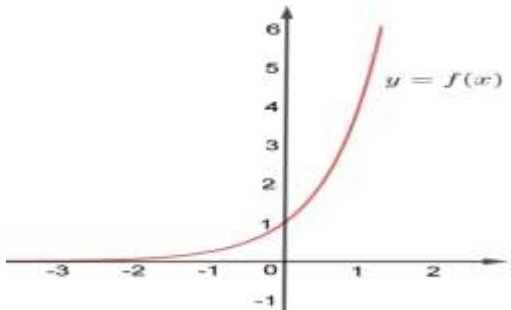
y : variabel terikat

- a. Jika fungsi eksponensial di gambarkan pada titik koordinat maka akan terletak pada dua kuadran yaitu kuadran I dan kuadran II.
- b. Jika $0 < b < 1$ maka kurva $f(x) = b^x$ akan bergerak turun secara kontinu dari kiri atas ke kanan bawah (*monotonically decreasing*) ketika nilai x turun. Dimana garisnya akan asimtotik terhadap sumbu x (sumbu horizontal) ketika nilai x mendekati positif tak hingga.
- c. Jika $b > 1$ maka kurva $f(x) = b^x$ akan bergerak naik secara kontinu dari kiri bawah ke kanan atas (*monotonically increasing*) ketika nilai x turun. Dimana garisnya akan asimtotik terhadap sumbu x (sumbu horizontal) ketika nilai x akan mendekati nilai negative tak hingga.
- d. Jika $b = 1$ maka kurva $f(x) = b^x$ akan berupa garis lurus yang sejajar dengan sumbu x (sumbu horizontal).

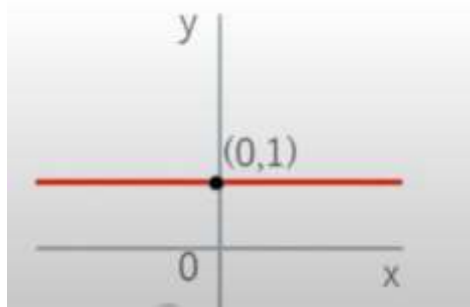
Perhatikan contoh kurva di bawah ini.



Pada contoh kurva tersebut jika $0 < b < 1$ maka kurvanya asimtotik terhadap sumbu x (sumbu horizontal) dan memotong sumbu y (sumbu vertikal) pada titik (0,1). Gambar kurvanya bergerak turun dari kiri atas ke kanan bawah.



Pada contoh kurva tersebut jika $b > 1$ maka kurvanya asimtotik terhadap sumbu x (sumbu horizontal) dan memotong sumbu y (sumbu vertikal) pada (0,1). Gambar kurvanya adalah bergerak naik dari kiri bawah ke kanan atas.



Pada contoh kurva tersebut jika $b = 1$ maka kurvanya merupakan kurva yang sejajar dengan sumbu x (sumbu horizontal).

Langkah-langkah untuk melukis kurva fungsi eksponensial adalah sebagai berikut:

- Tentukan hubungan antara x dan y .
- Tentukan titik-titik koordinatnya pada Cartesius.
- Hubungkan antar titik-titik koordinat tersebut.

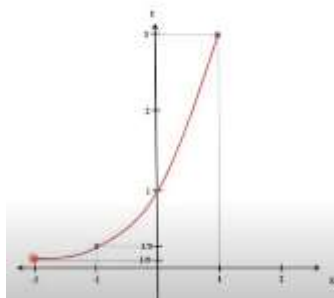
Contoh:

Gambarkan kurva dari fungsi eksponensial berikut
: $y = 3^x$

Penyelesaian:

x	y	(x,y)
$-\infty$	...	...
-2	$1/9$	$(-2, 1/9)$

-1	1/3	(-1,1/3)
0	1	(0,1)
1	3	(1,3)
2	9	(2,9)
∞	...	...



Bentuk kurva dari fungsi eksponensial sendiri sangat tergantung dengan nilai basisnya.

Bentuk fungsi eksponensial yang lebih umum adalah:

$$y = f(x) = be^{kx} + c$$

Dimana e merupakan bilangan Euler atau bilangan logaritma berbasis e ($e = 2,71828...$) dan c adalah konstanta. Fungsi ini juga memiliki kurva yang bersifat asimtotik di $y = c$.

Titik potong kurva pada sumbu x : $\left(\frac{1}{k} \ln \left| \frac{c}{b} \right|, 0\right)$

Titik potong kurva pada sumbu y : $(0, b + c)$

Contoh:

Tentukan titik potong kurva eksponensial $y = 2e^{0,5x} - 4$ pada masing-masing sumbu serta hitung nilai y pada saat $x = 4$!

Penyelesaian :

a. Titik potong

Pada sumbu y , misalkan $x = 0$

$$y = 2e^{0,5x} - 4 \rightarrow y = 2e^{0,5(0)} - 4$$

$$\rightarrow y = 2e^0 - 4$$

$$\rightarrow y = 2 - 4 = -2$$

Pada sumbu x , misalkan $y = 0$

$$y = 2e^{0,5x} - 4 \rightarrow 0 = 2e^{0,5x} - 4 \rightarrow 2e^{0,5x} = 4$$

$$\rightarrow e^{0,5x} = 2 \rightarrow \ln e^{0,5x} = \ln 2$$

$$\rightarrow 0,5x \cdot \ln e = \ln 2$$

$$\rightarrow 0,5x = 0,6931 \rightarrow x = 1,3863$$

b. Nilai y pada saat $x = 4$

$$y = 2e^{0,5x} - 4 \rightarrow y = 2e^{0,5(4)} - 4$$

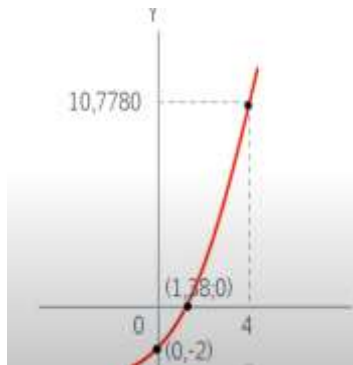
$$\rightarrow y = 2e^2 - 4$$

$$\rightarrow y = 2(2,71828)^2 - 4$$

$$\rightarrow y = 2(7,3890) - 4$$

$$\rightarrow y = 14,7780 - 4$$

$$\rightarrow y = 10,778$$



4. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma merupakan kebalikan dari fungsi eksponensial yaitu variabel bebasnya merupakan bilangan logaritma. Bentuk dari fungsi logaritma yaitu:

$$y = f(x) = {}^b\log x \quad (b > 0 \text{ dan } b \neq 1)$$

Atau

$$y = f(x) = {}^e\log x = \ln x$$

Dimana:

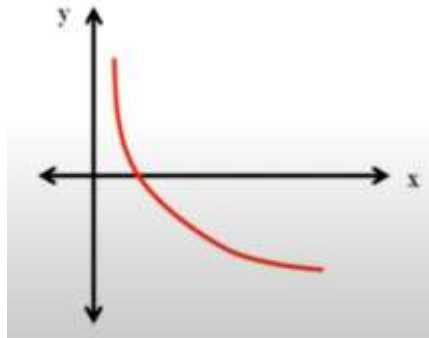
y : variabel terikat

$\ln x$ atau $\log x$: variabel bebas

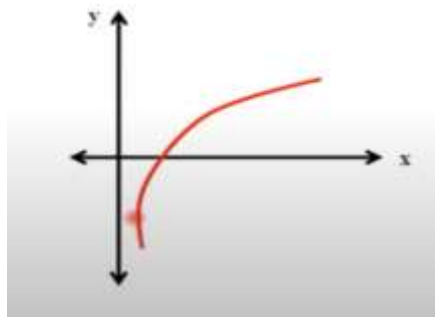
b atau e : bilangan pokok atau basis

Gambar dari kurva fungsi logaritma

- a. Kurva fungsi logaritma jika digambar dalam koordinat kartesius maka letaknya terdapat pada kuadran I dan kuadran IV.
- b. Jika $0 < b < 1$ maka kurva $f(x) = {}^b\log x$ akan bergerak turun dari kiri atas ke kanan bawah, dimana garis kurvanya akan asimtotik terhadap sumbu y (sumbu vertikal) dan memotong sumbu x (sumbu horizontal).



- c. Jika $b > 1$ maka kurva $f(x) = {}^b\log x$ akan bergerak naik dari kiri bawah ke kanan atas, dimana garis kurvanya akan asimtotik terhadap sumbu y (sumbu vertical) dan memotong sumbu x (sumbu horizontal).



Langkah-langkah untuk menggambar kurva fungsi logaritma adalah sebagai berikut:

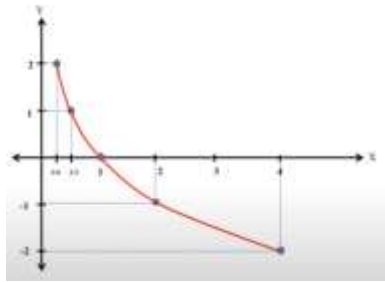
- Tentukan hubungan antara nilai x dan y (pilih x supaya nilai y mudah ditentukan)
- Tentukan titik-titik koordinatnya pada bidang Cartesius.
- Hubungkan antar titik-titik koordinat tersebut.

Contoh:

Gambarkan kurva dari fungsi logaritma berikut : $y = {}^{1/2}\log x$!

Penyelesaian :

x	y	(x, y)
$-\infty$	...	...
$1/4$	2	$(1/4, 2)$
$1/2$	1	$(1/2, 2)$
1	0	$(1, 0)$
2	-1	$(2, -1)$
4	-2	$(4, -2)$
∞	...	



Bentuk umum dari fungsi logaritma adalah sebagai berikut:

$$y = f(x) = a \ln(1 + x) + b \quad (x > -1)$$

Dimana kurvanya akan asimtotik terhadap garis $x = -1$.

Jika titik potong pada sumbu y maka $x = 0$, menjadi:

$$y = a \ln(1 + x) + b \quad \rightarrow \quad y = a \ln(1 + 0) + b = a \ln 1 + b = b$$

Titik potong pada sumbu x maka $y = 0$, menjadi :

$$y = a \ln(1 + x) + b \quad \rightarrow \quad 0 = a \ln(1 + x) + b$$

$$\rightarrow a \ln(1 + x) = -\frac{b}{a}$$

$$\rightarrow 1 + x = e^{-\frac{b}{a}}$$

$$\rightarrow x = e^{-\frac{b}{a}} - 1$$

Contoh :

Tentukan titik potong pada kurva logaritma $y = 2 \ln(1 + x) + 6$ pada masing-masing sumbu dan hitung nilai y pada saat $x = 4$!

Penyelesaian :

a. Titik potong pada sumbu y , misalkan $x = 0$ maka diperoleh

$$y = 2 \ln(1 + x) + 6 \rightarrow y = 2 \ln(1 + 0) + 6$$

$$\rightarrow y = 2 \ln(1) + 6 = 6$$

b. Titik potong pada sumbu x , misalkan $y = 0$ maka diperoleh

$$y = 2 \ln(1 + x) + 6 \rightarrow 0 = 2 \ln(1 + x) + 6$$

$$\rightarrow 2 \ln(1 + x) = -6$$

$$\rightarrow \ln(1 + x) = -3$$

$$\rightarrow 1 + x = e^{-3}$$

$$\rightarrow 1 + x = (2,71828)^{-3}$$

$$\rightarrow x = -0,9502$$

c. Nilai y pada $x = 4$

$$y = 2 \ln(1 + x) + 6 \rightarrow y = 2 \ln(1 + 4) + 6$$

$$\rightarrow y = 2 \ln(5) + 6$$

$$\rightarrow y = 2(1,6094) + 6$$

$$\rightarrow y = 3,2188 + 6$$

$$\rightarrow y = 9,2188$$

C. Latihan

1. Identifikasi persamaan berikut ini apakah kurvanya berbentuk lingkaran, elips, hiperbola atau parabola!
 - a. $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 65 = 0$
 - b. $y^2 - 4y + 4x - 8 = 0$
 - c. $9x^2 - 16y^2 = 144$
 - d. $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$
2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dari persamaan lingkaran berikut:
 - a. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
 - b. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$
 - c. $2x^2 + 2y^2 + 16x - 4y - 38 = 0$
 - d. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
3. Tentukan pusat, jari-jari Panjang dan jari-jari pendek dari persamaan elips berikut:
 - a. $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$
 - b. $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$
 - c. $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$
 - d. $16x^2 + 25y^2 = 400$
4. Tentukan puncak beserta asimtot-asimtot dari persamaan hiperbola berikut:
 - a. $-9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$
 - b. $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y = 0$
 - c. $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 6 = 0$

- d. $x^2 - y^2 - 4 = 0$
5. Tentukan titik ekstrim dan titik potongnya terhadap sumbu-sumbu koordinatnya dari persamaan parabola berikut :
- a. $y^2 - 16x - 8y - 16 = 0$
- b. $y^2 - 8x = 0$
- c. $y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$
- d. $y = x^2 - 5x + 6$
6. Tentukan titik maksimum dan titik belok dari persamaan kubik $C = Q^3 - 3Q^2 - 4Q + 12$!
7. Gambarlah grafik fungsi $y = 2^x$!
8. Tentukan titik potong kurva eksponensial $y = 2e^x$ pada masing-masing sumbu serta gambarlah grafiknya!
9. Gambarlah grafik fungsi $f(x) = {}^2\log x$!
10. Tentukan titik potong pada kurva logaritma $y = 5 \ln x$ pada masing-masing sumbu dan hitung nilai y pada saat $x = 2$!

D. Referensi

- Allen, R. G. D. (1966) *Mathematical Economics*. New York: St. Martin's Press.
- Dumairy. (2010) *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*, BPFE, Yogyakarta.

- Hamidah, dkk. (2020) Matematika Ekonomi 1 dan 2 untuk Analisa Ekonomi, Bisnis dan Ilmu Sosial. Surabaya : Scopindo Media Pustaka.
- Johannes, dkk. (1982) Pengantar Matematika untuk Ekonomi. Jakarta: LP3ES.
- Mesra, B. (2016) Penerapan Ilmu Matematika dalam Ekonomi dan Bisnis. Yogyakarta: CV Budi Utama.
- Olivier, J. (2017) Business Math: A Step by Step Handbook. Canada: Creative Commons License (CC BY-NC-SA).
- Putrodjoyo G dan Untung Rahardja. (2015) Matematika Ekonomi. Jakarta: PT. Grasindo.
- Rifa'i Rusdian. (2016) Aljabar Matriks Dasar. Yogyakarta: Deepublish.
- Rinaldi. (2020). Buku Ajar Matematika Ekonomi. Jakarta: FEB Universitas Persada Indonesia

PERTEMUAN IX

APLIKASI FUNGSI NON LINEAR

A. Capaian Pembelajaran

1. Menganalisis permasalahan ekonomi yang berkaitan dengan fungsi linear.
2. Mengembangkan rumus fungsi non linear yang berkaitan dalam bidang ekonomi.

B. Materi

Penerapan fungsi non linear dalam ekonomi yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

1. Fungsi Permintaan, Fungsi Penawarana dan Keseimbangan Pasar

a. Fungsi Permintaan (demand)

Bentuk umum fungsi permintaan non linear adalah sebagai berikut:

$$P = -aQ^2 + bQ + c$$

Perhatikan bahwa nilai koefisien dari Q^2 yaitu a dari fungsi permintaan adalah negatif.

Contoh:

Jika diketahui fungsi permintaan adalah $P = -Q^2 + 25$. Gambarkan fungsi permintaan tersebut dalam satu diagram!

Penyelesaian:

1) Titik Puncak

$$Q = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(-1)} = 0, \text{ substitusikan nilai } Q = 0 \text{ ke } P$$

$$P = 25 - 0 = 25$$

Jadi titik puncaknya (0,25)

2) Titik Potong

Sumbu Q , maka $P = 0$

$$-Q^2 + 25 = 0$$

$$25 = Q^2 \pm 5 = Q$$

$$Q_1 = 5 \text{ dan } Q_2 = -5$$

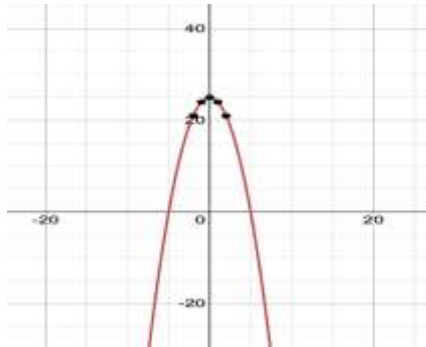
Jadi kurva akan berpotongan dengan sumbu Q pada (5,0) dan (-5)

Sumbu P , maka $Q = 0$

$$P = -Q^2 + 25 = 0 - 25 = 25$$

Jadi kurva akan berpotongan dengan sumbu P pada (0,25)

3) Grafik



b. Fungsi Penawaran (Supply)

Bentuk umum dari fungsi penawaran adalah sebagai berikut:

$$P = aQ^2 + bQ + c$$

Perhatikan bahwa nilai koefisien dari Q^2 yaitu a dari fungsi penawaran adalah positif. Hal ini berbanding terbalik dengan fungsi permintaan.

Contoh :

Jika sebuah fungsi penawaran adalah $P = Q^2 - 4Q -$

5. Gambarkanlah fungsi penawaran tersebut dalam satu diagram!

Penyelesaian :

1) Titik Puncak

$$Q = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2, \text{ selanjutnya substitusikan}$$

nilai $Q = 2$ ke P

$$P = (2)^2 - 4(2) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$$

Jadi titik puncaknya $(2, -9)$

2) Titik Potong

Sumbu Q , maka $P = 0$

$$Q^2 - 4Q - 5 = 0$$

$$(Q - 5)(Q + 1) = 0$$

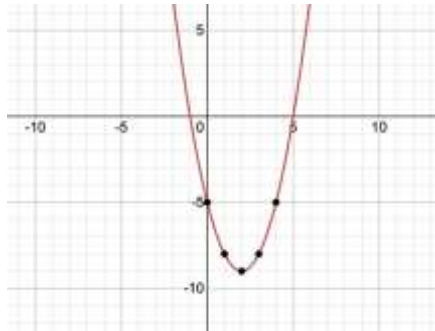
$$Q_1 = 5 \quad \text{dan} \quad Q_2 = -1$$

Jadi titik potong kurva terhadap sumbu Q adalah pada $(5, 0)$ dan $(-1, 0)$

Sumbu P , maka $Q = 0$

$$P = Q^2 - 4Q - 5 = 0^2 - 4(0) - 5 = -5$$

Jadi titik potong kurva terhadap sumbu P adalah $(0, -5)$



c. Keseimbangan Pasar

Seperti yang telah dibahas sebelumnya, selain berbentuk fungsi linear, permintaan dan penawaran juga bisa berbentuk fungsi non linear. Pada fungsi permintaan dan penawaran pada fungsi linear sebelumnya kurva permintaan dan kurva penawaran adalah berupa garis lurus, sebenarnya fungsi tersebut merupakan fungsi yang mengalami bentuk penyederhanaan. Artinya fungsi tersebut sangat jauh dari keadaan realita. Sehingga fungsi permintaan dan fungsi penawaran yang mendekati keadaan sesungguhnya adalah fungsi permintaan dan fungsi penawaran yang berbentuk non linear. Fungsi kuadrat ini dapat berupa potongan lingkaran, elips, hiperbola maupun parabola. Menganalisa keseimbangan pasar fungsi non linear hampir sama dengan menganalisa fungsi linear. Keseimbangan pasar tercipta apabila permintaan dan penawaran mengalami equal (sama). Perhatikan kurva berikut.



$$Q_d = Q_s$$

Keseimbangan Pasar :

Q_d = jumlah permintaan

Q_s = jumlah penawaran

E = titik keseimbangan

P_e = harga keseimbangan

Q_e = jumlah keseimbangan

Jika diperhatikan kurva permintaan dan penawaran mengalami perpotongan di titik E atau disebut juga titik equilibrium. Pada titik equilibrium inilah dapat diperoleh harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan.

Contoh:

Fungsi permintaan suatu produk ditunjukkan oleh persamaan $Q_d = 19 - P^2$ sedangkan fungsi penawarannya $Q_s = -8 + 2P^2$. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar?

Penyelesaian :

$$\text{Diketahui : } Q_d = 19 - P^2 \quad \text{dan} \quad Q_s = -8 + 2P^2$$

Harga Keseimbangan

$$\text{Syarat keseimbangan : } Q_d = Q_s$$

$$19 - P^2 = -8 + 2P^2$$

$$19 + 8 = 2P^2 + P^2 \rightarrow 3P^2 = 27$$

$$P^2 = 9$$

$$P_e = \sqrt{9} = 3$$

Jumlah Keseimbangan

$$Q_s = -8 + 2P^2 \rightarrow Q_e = -8 + 2P_e^2$$

$$Q_e = -8 + 2(3)^2$$

$$Q_e = -8 + 18$$

$$Q_e = 10$$

Jadi harga dan jumlah keseimbangan pasar adalah E (10,3).

2. Fungsi Biaya

Biaya merupakan tanggungan yang harus dibayarkan produsen untuk menghasilkan barang atau jasa sampai barang tersebut siap untuk dikonsumsi. Fungsi biaya merupakan hubungan antara biaya dengan jumlah produk yang dihasilkan. Teori biaya dibahas juga

pada prinsip ekonomi bahwa biaya merupakan suatu pengorbanan yang harus dilakukan untuk melaksanakan suatu proses produksi yang dinyatakan dengan satuan uang sesuai harga pasar yang berlaku baik yang sudah terjadi maupun yang akan terjadi. Unsur-unsur dalam teori biaya meliputi : Fixed Cost (FC), Variabel Cost (VC), Total Cost (TC), Average Cost (AC), Average Variabel Cost (AVC), Average Fixed Cost (AFC) dan Marginal Cost (MC). Pada teori mikro prinsip diminishing return (pengembalian berkurang) diketahui bahwa pada saat average variabel cost rendah maka akan dipotong oleh marginal cost. Perpotongan ini terjadi pada titik dimana produksi berjalan efisien, sebelum prinsip diminishing return menyebabkan berkurangnya peningkatan ini.

Rumus dasar dari unsur-unsur fungsi biaya adalah sebagai berikut:

a. Biaya Tetap (Fixed Cost = FC)

Biaya tetap merupakan biaya yang dikeluarkan perusahaan namun tidak tergantung pada jumlah produk yang dihasilkan.

$$FC = k ; k = \text{konstanta}$$

b. Biaya Variabel (Variabel Cost = VC)

Biaya variable merupakan biaya yang berubah tergantung pada jumlah produk yang dihasilkan.

$$VC = f(Q)$$

c. Biaya Total (Total Cost = TC)

Biaya total merupakan penjumlahan antara biaya tetap dan biaya variabel.

$$TC = C = VC + FC = f(Q) + k$$

d. Biaya Tetap Rata-rata (Average Fixed Cost = AFC)

Biaya tetap rata-rata merupakan biaya tetap yang dibebankan pada satu unit produk.

$$AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{k}{Q}$$

e. Biaya Variabel Rata-Rata (Average Variable Cost = AVC)

Biaya variabel rata-rata merupakan biaya variabel yang dibebankan pada satu unit produk.

$$AVC = \frac{VC}{Q} = \frac{f(Q)}{Q}$$

f. Biaya Rata-Rata (Average Cost = AC)

Biaya rata-rata adalah biaya yang dikeluarkan untuk menghasilkan tiap unit produk keluaran. Biaya

rata-rata merupakan hasil bagi antara biaya total terhadap jumlah keluaran yang dihasilkan

$$AC = \frac{C}{Q} = AFC + AVC$$

g. Biaya Marginal (Marginal Cost = MC)

Sedangkan biaya marginal adalah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk.

$$MC = \frac{\Delta C}{\Delta Q}$$

Fungsi biaya yang non linear ini dapat berupa fungsi kuadrat dan fungsi kubik. Hubungan antara biaya total dan bagian-bagiannya secara grafik dapat dilihat sebagai berikut:

a. Biaya total merupakan fungsi kuadrat parabola

Andaikan $C = aQ^2 - bQ + c$ maka $VC = aQ^2 - bQ$ dan $CF = c$, maka

$$AC = \frac{C}{Q} = aQ - b + \frac{c}{Q}$$

$$AC = \frac{VC}{Q} = aQ - b$$

$$AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{c}{Q}$$

b. Biaya Total merupakan fungsi kubik

Andaikan $C = aQ^3 - bQ^2 + cQ + d$, maka

$$VC = aQ^3 - bQ^2 + cQ \quad \text{dan} \quad FC = d \quad \text{maka}$$

$$AC = \frac{C}{Q} = aQ^2 - bQ + c + \frac{d}{Q}$$

$$AVC = \frac{VC}{Q} = aQ^2 - bQ + c$$

$$AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{d}{Q}$$

Contoh:

Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan tekstil ditunjukkan oleh persamaan $TC = 2Q^2 - 24Q + 102$. Tentukan:

- Pada tingkat produksi berapa unit biaya total minimum?
- Hitung besar biaya total minimum berdasarkan unit produk yang dihasilkan!
- Hitunglah besarnya biaya tetap, biaya variabel, biaya rata-rata, biaya tetap rata-rata dan biaya variabel rata-rata pada tingkat produksi tersebut!
- Seandainya dari kedudukan ini produksinya dinaikkan dengan 1 unit, berapa besarnya biaya marginal?

Penyelesaian:

$$\text{Diketahui : } TC = 2Q^2 - 24Q + 102 \rightarrow y = 2x^2 - 24x + 102$$

Identifikasi :

Parabola dengan sumbu simetris sejajar sumbu vertical

Nilai $a = 2$ atau $a > 0$, maka merupakan parabola terbuka ke atas

$$\text{Nilai } b = -24$$

$$\text{Nilai } c = 102$$

a. Titik Ekstrim :

$$Q_{\text{minimum}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-24)}{2(2)} = \frac{24}{4} = 6 \text{ unit}$$

Jadi biaya minimum terjadi saat memproduksi 6 unit barang.

$$\text{b. Besarnya } C_{\text{minimum}} = 2Q^2 - 24Q + 102$$

$$= 2(6)^2 - 24(6) + 102 = 30$$

Atau besar C minimum dapat juga dicari dengan rumus ordinat titik ekstrim parabola, yaitu:.

$$C_{\text{min}} = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{(24)^2 - 4(2)(102)}{-4(2)} = \frac{-240}{-8} = 30$$

Jadi biaya untuk memproduksi 6 unit barang adalah sebesar 30.

c. Titik Potong

Pada sumbu y , maka $x = 0$

$$y = 2x^2 - 24x + 102$$

$$y = 2(0)^2 - 24(0) + 102 = 102$$

Kemudian pada saat $Q = 6$, maka diperoleh:

$$FC = 102$$

$$VC = 2Q^2 - 24Q \rightarrow VC = 2(6)^2 - 24(6) = -72$$

$$AC = \frac{C}{Q} = \frac{30}{6} = 5$$

$$AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{102}{6} = 17$$

$$AVC = \frac{VC}{Q} = \frac{-72}{6} = -12$$

$$d. Q_1 = 6 \rightarrow C = 2(6)^2 - 24(6) + 102 = 30$$

$$Q_2 = 6 + 1 = 7$$

$$\text{Jika } Q_2 = 7. \rightarrow C = 2(7)^2 - 24(7) + 102 = 32$$

$$MC = \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{32 - 30}{7 - 6} = 2$$

Berarti untuk menaikkan produksi 6 unit menjadi 7 unit diperlukan biaya tambahan (biaya marginal) sebesar 2.

3. Fungsi Penerimaan

Bentuk fungsi penerimaan total (*total revenue*) merupakan fungsi non linear yang berupa fungsi parabola terbuka ke bawah, khususnya yang biasanya terjadi pada pasar monopoli. Penerimaan total merupakan fungsi dari jumlah barang, diperoleh dari mengalikan antara jumlah barang dengan harga barang per unit. Di dalam konsep penerimaan juga terdapat penerimaan rata-rata dan penerimaan marjinal. Unsur-unsur dalam fungsi penerimaan sendiri meliputi total revenue (TR), average revenue (AR), marginal revenue (MR). Penerimaan rata-rata (average revenue, AR) merupakan penerimaan yang diperoleh per unit barang. Penerimaan rata-rata diperoleh dari penerimaan total yang dibagi dengan jumlah barang. Sedangkan penerimaan marjinal (marginal revenue, MR) merupakan penerimaan tambahan yang diperoleh dari setiap tambahan satu unit barang yang dihasilkan atau terjual.

a. Penerimaan Total (Total Revenue = TR)

$$TR = P \times Q = f(Q)$$

Dimana:

TR : total revenue (penerimaan total)

P : price (harga barang)

Q : quantity (jumlah barang yang dijual)

Titik dari penerimaan total dapat dicari dengan rumus:

$$(Q, P) = \left(\frac{-b}{2a}, f(Q) \right)$$

b. Penerimaan Rata-rata (Average Revenue = AR)

$$AR = \frac{TR}{Q}$$

Dimana :

AR : average revenue (penerimaan rata-rata)

TR : total revenue (penerimaan total)

Q : quantity (jumlah barang)

c. Penerimaan Marjinal (Marginal Revenue = MR)

$$MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q}$$

Dimana :

MR : marginal revenue (penerimaan marjinal)

ΔTR : perubahan total revenue (penerimaan total)

ΔQ : perubahan quantity (jumlah barang)

Contoh:

Fungsi permintaan yang dihadapi oleh seorang produsen monopolis ditunjukkan oleh $1,5Q_d = 900 -$

P. Berapakah besar penerimaan total jika jumlah barang yang terjual sebanyak 200 unit. Berapa besar penerimaan total jika jumlah barang yang terjual meningkat menjadi 300 unit?

Penyelesaian :

Diketahui :

$$1,5Q_d = 900 - P \quad \rightarrow \quad 1,5Q_d - 900 = -P$$

$$\rightarrow P = 900 - 1,5Q_d$$

Ditanya. : TR = ...? (saat Q = 200)

TR = ...? (saat Q = 300)

Penyelesaian :

Pada saat Q = 200, maka

$$TR = P \times Q$$

$$TR = (900Q - 1,5Q_d) \times Q$$

$$TR = 900Q - 1,5Q^2$$

$$TR = 900(200) - 1,5(200)^2$$

$$TR = 180.000 - 1,5(40.000)$$

$$TR = 180.000 - 60.000$$

$$TR = 120.000$$

Jadi besar TR pada saat $Q = 200$ adalah 120.000

Pada saat $Q = 300$, maka

$$TR = P \times Q$$

$$TR = (900Q - 1,5Q_d) \times Q$$

$$TR = 900Q - 1,5Q^2$$

$$TR = 900(300) - 1,5(300)^2$$

$$TR = 270.000 - 1,5(90.000)$$

$$TR = 270.000 - 135.000$$

$$TR = 135.000$$

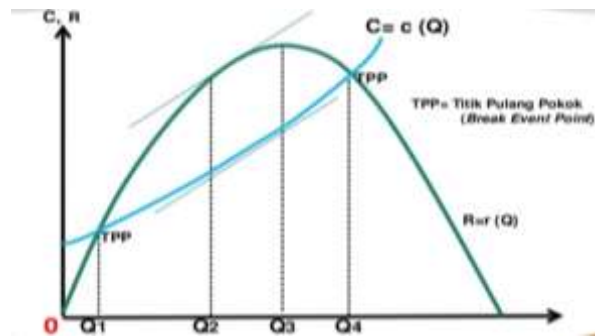
Jadi besar TR saat $Q = 300$ adalah 135.000

4. Keuntungan, Kerugian dan Pulang Pokok (Break Event Point)

Keuntungan ($\pi = \text{profit function}$) terjadi apabila penerimaan total lebih besar dari biaya total. Dengan kata lain dapat dituliskan $TR > TC$ atau $\pi = TR - TC = R - C$. Sedangkan kerugian terjadi apabila penerimaan total lebih kecil dari biaya total atau $TR < TC$.

Analisis Pulang Pokok (*break-even*) adalah suatu konsep yang digunakan untuk menganalisis jumlah minimum produk yang harus dihasilkan atau terjual oleh suatu perusahaan supaya tidak mengalami kerugian. Keadaan pulang pokok (profit nol $\pi = 0$) terjadi apabila

$TR = TC$. Perusahaan akan mengalami kondisi impas yaitu tidak keadaan tidak mengalami untung ataupun rugi. Secara grafik hal ini dapat ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva R dan kurva C.



- Keuntungan : daerah dari titik Q_1 sampai Q_4 yang dibatasi oleh C dan R ($R > C$).
- Kerugian : area dari sebelah kiri Q_1 dan sebelah kanan Q_4 . Jika dilihat pada gambar terdapat kurva C yang merupakan biaya total (cost) yang ternyata lebih besar dari R atau penerimaan. ($R < C$)
- Break even poin : Titik potong kurva C dan titik potong kurva R. Pada grafik tersebut terdapat dua titik potong pada Q_1 dan Q_4 . ($R = C$)
- Penerimaan Total Maksimum : terdapat pada titik Q_3 (titik yang P nya paling tinggi)

Contoh:

- Sebuah perusahaan onderdil sepeda motor memperoleh penerimaan dengan persamaan $R =$

$-0,1Q^2 + 20Q$, sedangkan biaya total yang dikeluarkan $C = 0,25Q^3 - 3Q^2 + 7Q + 20$. Hitunglah profit perusahaan onderdil sepeda motor tersebut jika dihasilkan dan terjual barang sebanyak 10 unit dan 20 unit!

Penyelesaian :

$$\pi = R - C$$

$$= -0,1Q^2 + 20Q - 0,25Q^3 + 3Q^2 - 7Q - 20$$

$$= -0,25Q^3 + 2,9Q^2 + 13Q - 20$$

$$Q = 10 \rightarrow \pi = -0,25(10)^3 + 2,9(10)^2 + 13(10) - 20$$

$$= -0,25(1000) + 2,9(100) + 130 - 20$$

$$= -250 + 290 + 130 - 20$$

$$= 150 \text{ (keuntungan)}$$

$$Q = 20 \rightarrow \pi = -0,25(20)^3 + 2,9(20)^2 + 13(20) - 20$$

$$= -0,25(8000) + 2,9(400) + 260 - 20$$

$$= -2000 + 1160 + 260 - 20$$

$$= -600 \text{ (kerugian)}$$

- 2) Suatu perusahaan air mineral memperoleh penerimaan total yang ditunjukkan oleh fungsi $R = -0,1Q^2 + 300Q$, sedangkan biaya total yang dikeluarkannya $C = 0,3Q^2 - 720Q + 600.000$. Hitunglah produksi yang menghasilkan penerimaan total maksimum? Tingkat produksi yang menunjukkan biaya total minimum! Manakah yang lebih baik bagi perusahaan, berproduksi pada tingkat produksi yang menghasilkan penerimaan total maksimum atau biaya total minimum?

Penyelesaian :

Diketahui :

$$R = -0,1Q^2 + 300Q$$

$$C = 0,3Q^2 - 720Q + 600.000$$

R maksimum terjadi pada $Q = \frac{-b}{2a} = \frac{-300}{-0,2} = 1.500$
unit

C maksimum terjadi pada $Q = \frac{-b}{2a} = \frac{700}{0,6} = 1.200$ unit

π pada R maksimum

$$Q = 1500 \rightarrow \pi = R - C$$

$$= -0,4Q^2 + 1020Q - 600.000$$

$$= -0,4(1500)^2 + 1020(1500) - 600.000$$

$$= -0,4(2.250.000) + 1.530.000 - 600.000$$

$$= -900.000 + 1.530.000 - 600.000$$

$$= 30.000$$

$$Q = 1200 \rightarrow \pi = R - C$$

$$= -0,4Q^2 + 1020Q - 600.000$$

$$= -0,4(1200)^2 + 1020(1200) - 600.000$$

$$= -0,4(1.440.000) + 1.530.000 - 600.000$$

$$= -576.000 + 1.224.000 - 600.000$$

$$= 48.000$$

Dapat disimpulkan agar keuntungan maksimum maka perusahaan perlu memproduksi barang dengan unit sebanyak 1.200 saat biaya total minimum.

5. Fungsi Utilitas

Secara bahasa utilitas merupakan serapan kata bahasa Inggris yaitu *utility* yang mempunyai arti kepuasan atau kegunaan. Sedangkan dalam ekonomi, utilitas dapat diartikan sebagai jumlah kepuasan atau manfaat yang diperoleh konsumen sebagai akibat dari penggunaan barang maupun jasa. Fungsi utilitas menjelaskan besarnya utilitas (kepuasan, kegunaan) konsumen saat mengkonsumsi suatu barang atau jasa.

Semakin banyak jumlah suatu barang dikonsumsi maka besar utilitas yang diperoleh juga akan naik, kemudian mencapai puncaknya (titik jenuh) pada jumlah konsumsi tertentu. Kemudian barang akan berkurang apabila jumlah barang yang dikonsumsi terus menerus ditambah. Contohnya adalah saat kita sedang makan, kita hanya akan merasakan kepuasannya atau pada titik jenuh yaitu saat kita sudah merasa kenyang. Apabila makan terus ditambah maka titik kepuasan kita akan berkurang. Pandangan terhadap utilitas dapat dibagi menjadi dua, yaitu :

a. Utilitas Kardinal

Utilitas kardinal mengasumsikan bahwa kepuasan yang diperoleh konsumen dengan mengonsumsi barang dan jasa dapat diukur dengan angka.

b. Utilitas Ordinal

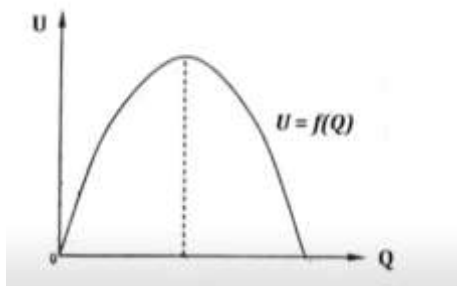
Utilitas ordinal mengasumsikan bahwa konsumen hanya dapat membandingkan manfaat yang mereka dapatkan dari kombinasi pekerjaan dan barang yang berbeda, akan tetapi tidak dapat mengukur perbedaan di antara mereka.

Secara umum utilitas dapat dibagi dua yaitu :

a. Utilitas Total

Utilitas total merupakan fungsi dari jumlah barang yang dikonsumsi. Persamaan utilitas total dari mengonsumsi suatu jenis barang berupa fungsi kuadrat parabolic dengan kurva berbentuk parabola terbuka ke bawah. Utilitas total ini memiliki formula untuk menghitungnya menggunakan pendekatan cardinal atau yang dapat diukur dengan angka. Formula untuk utilitas total ini adalah

$$U = f(Q)$$

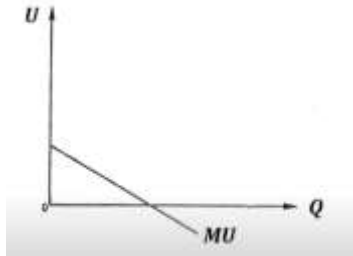


Semakin banyak barang Q yang dikonsumsi maka akan semakin tinggi nilai kepuasan yang diperoleh. Akan tetapi hanya sampai titik maksimum, tambahan barang Q yang dikonsumsi akan mengakibatkan menurunnya kepuasan konsumen.

b. Utilitas Marjinal

Utilitas marjinal merupakan utilitas tambahan yang diperoleh dari setiap tambahan satu unit barang yang dikonsumsi. Formula dari utilitas marjinal adalah

$$MU = \frac{\Delta U}{\Delta Q}$$



Kurva dari utilitas marjinal berbentuk linear. Semakin banyak barang Q yang dikonsumsi maka utilitas marjinal (tambahan kepuasan) akan semakin berkurang bahkan pada kondisi (titik) tertentu dapat bernilai negatif.

6. Fungsi Produksi

Fungsi produksi adalah suatu fungsi atau persamaan yang menyatakan hubungan antara tingkat output dengan tingkat input. Dengan adanya fungsi produksi maka perusahaan dapat menganalisis jumlah output maksimum yang akan diproduksi oleh perusahaan berdasarkan sejumlah input yang digunakan oleh perusahaan. Ketika input-input produk terdiri dari capital, labour, resources dan technology maka persamaan produksi dituliskan sebagai berikut:

$$Q = f(C, L, R, T)$$

Dimana :

Q : Quantity (jumlah barang yang dihasilkan)

f : fungsi (symbol persamaan fungsional)

C : Capital (modal atau sarana yang digunakan)

L : Labour (tenaga kerja)

R : Resources (sumber daya alam)

T : Technology (teknologi dan kewirausahaan)

Berdasarkan kepentingan produsen, tujuan dari produksi sendiri adalah untuk menghasilkan barang yang dapat memberikan keuntungan. Tujuan tersebut dapat tercapai apabila barang dan jasa yang diproduksi sesuai dengan kebutuhan masyarakat. Untuk analisis fungsi produksi akan terikat pada *the law of diminishing return*, yang mengungkapkan bahwa:

- a. Jika perusahaan menambah factor produksi (input) tenaga kerja dan tidak menambah factor produksi yang lainnya (modal, sumber daya alam dan teknologi) maka produksi total akan mengalami peningkatan.
- b. Seiring dengan semakin bertambahnya input tenaga kerja, pada suatu tingkatan tertentu akan menyebabkan pertambahan produksi total semakin berkurang dan pada akhirnya akan mencapai titik negatif.

Unsur-unsur dalam fungsi produksi meliputi:

a. Fungsi Produksi Total (TP)

Fungsi produksi total merupakan hubungan matematis yang menggambarkan jumlah output (Q) akan diperoleh dengan menggunakan input tenaga kerja dan mengasumsikan input produksi lainnya adalah tetap. Fungsi produksi total dapat menganalisis tingkat produksi perusahaan berdasarkan pada input produksi yang digunakan.

$$TP = f(K, L)$$

Dimana :

TP : total produksi

K : modal (Capital) dianggap konstan

L : tenaga kerja (labor)

b. Fungsi Produksi marjinal (marginal product = MP)

Fungsi produksi marjinal merupakan hubungan matematis yang menggambarkan pertambahan jumlah output (Q) yang disebabkan oleh adanya pertambahan input tenaga kerja yang digunakan. Fungsi produksi marjinal dapat menganalisis tingkat produktivitas perusahaan.

$$MP = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

Dimana :

MP : produk marjinal

ΔQ : perubahan atau tambahan produk total

ΔL : perubahan atau tambahan tenaga kerja

Penurunan dari nilai MP sendiri merupakan indikasi telah terjadi Law of Dimishing Return.

c. Fungsi Produksi Rata-rata (average product = AP)

Fungsi produksi rata-rata adalah hubungan matematis yang menggambarkan rata-rata jumlah output (Q) yang dihasilkan oleh setiap perubahan input tenaga kerja yang digunakan. Fungsi rata-rata dapat menganalisis tingkat produktivitas suatu perusahaan.

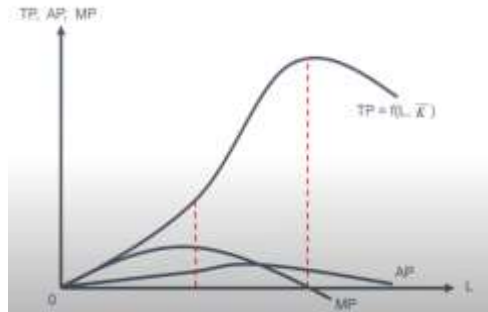
$$AP = \frac{\Sigma Q}{\Sigma L} = \frac{Q}{L}$$

Dimana :

AP : rata-rata produksi

Q : produk total

L : tenaga kerja



Perhatikan kurva di atas. Dalam teori produksi terdapat tiga siklus tahap-tahap produksi.

- Tahap I : sampai pada kondisi AP maksimum, penambahan tenaga kerja akan meningkatkan produksi total dan produksi rata-rata. Oleh sebab itu hasil yang akan diperoleh dari tenaga kerja lebih besar dari tambahan upah yang harus dibayarkan. Perusahaan akan mengalami kerugian apabila perusahaan berhenti produksi di fase ini.
- Tahap II : antara AP maksimum sampai MP sama dengan nol. Pada tahap II ini dimulai dari titik AP maksimum sampai titik dimana $MP = 0$ atau TP maksimum. Dikarenakan LDR yang berlaku maka MP dan AP akan mengalami penurunan walaupun nilainya masih positif. Penambahan tenaga kerja pada fase ini akan tetap menambah produksi total sampai mencapai nilai maksimum.

Tahap II : antara AP maksimum sampai dengan MP sama dengan nol. Batas daerah produksi ekonomis merupakan daerah tahap II, apabila terjadi diluar

tasa area tersebut maka tidak akan meningkatkan produksi. Perusahaan hanya bias melakukan ekspansi di batas daerah produksi ekonomi saja.

- Tahap III : saat MP bernilai negatif ($MP < 0$) perusahaan sudah tidak dimungkinkan untuk melanjutkan kegiatan produksi dikarenakan penambahan tenaga kerja yang dapat menurunkan produksi total. Perusahaan akan mengalami kerugian pada fase ini.

Contoh:

Suatu proses produksi yang menggunakan input L dan K untuk menghasilkan produk tertentu. Dalam proses produksi tersebut, input L sebagai input variable dan input K sebagai input tetap pada tingkat 20 unit. Persamaan produksi total yang dihasilkan dari proses produksi tersebut ditunjukkan oleh persamaan $Q = 8L + 30$. Berdasarkan informasi tersebut, tentukan produksi rata-rata L (APL) pada tingkat penggunaan input L sebanyak 10 unit!

Penyelesaian :

Diketahui :

$$Q = 8L + 30$$

$$L = 10$$

Maka substitusi $L = 10$ ke persamaan

$$Q = 8L + 30$$

$$Q = 8(10) + 30$$

$$Q = 80 + 30$$

$$Q = 110$$

Produksi total (Q) pada penggunaan input L sebanyak 10 unit adalah 110 unit.

$$APL = \frac{Q}{L}$$

$$APL = \frac{110}{10}$$

$$APL = 11$$

Produksi rata-rata L (APL) pada penggunaan input L sebanyak 10 unit adalah 11 unit.

7. Model Bunga Majemuk

Dalam ekonomi bunga dikenal sebagai *time value of money* atau nilai uang pada masa yang akan datang. Bunga majemuk merupakan bunga yang akan diberikan berdasarkan modal awal dan akumulasi bunga pada waktu-waktu sebelumnya. Model bunga majemuk dapat menghitung besar pinjaman ataupun tabungan dari jumlah sekarang ke periode jumlah yang akan datang. Besarnya modal yang dibungakan tergantung dari waktu lamanya modal dibungakan, asal tingkat bunganya

konstan. Bentuk umum dari bunga majemuk adalah sebagai berikut.

- a. Jika modal awalnya adalah M_0 akan mendapatkan bunga majemuk sebesar $i\%$ (dalam bentuk persen) per bulan maka setelah n bulan besar modal M_n menjadi:

$$M_n = M_0(1 + i)^n$$

- b. Untuk mencari besar bunga kumulatif (I_n), maka:

$$I_n = M_n - M_0$$

$$I_n = M_0(1 + i)^n - M_0 = M_0[(1 + i)^n - 1]$$

- c. Jika modal awal sebesar M_0 di simpan di bank mendapatkan bunga sebesar i per tahunnya dan perhitungan bunga dihitung sebanyak m kali dalam setahun maka besar modal pada akhir tahun ke – n adalah

$$M_n = M_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}$$

Model bunga majemuk ini merupakan bentuk fungsi eksponensial dengan M_0 sebagai variable terikat (*dependent variabel*) dan n sebagai variable bebas (*independent variabel*). Jika nilai m sangat besar maka besar bunga akan diperhitungkan terus menerus dalam

satu tahun. Jumlah di masa depan tersebut dapat dirumuskan menjadi:

$$M_n \approx M_0 e^{in}$$

Dimana:

M_n : modal akhir atau besar modal pada tahun ke n

M_0 : modal awal atau besar modal pada tahun yang ke 0 (nol)

e : euler atau bilangan basis dalam logaritma natural ($e = 2,718...$)

m : kelipatan bunga yang dibayarkan

i : besarnya bunga

n : waktu lamanya modal pokok dibungakan

Bentuk seperti ini dinamakan model bunga majemuk sinambung (*continuous compound interest*). Bunga majemuk sinambung dalam kasus peminjaman sering sekali dipakai dalam hitungan para lintah darat yang kadang-kadang menetapkan besar bunga pinjaman secara harian ($m=360$).

Contoh:

- 1) Seorang ibu rumah tangga meminjam uang sebesar Rp 1.000.000,00 dan memiliki bunga majemuk sebesar 6% per bulan yang wajib dibayarkan setiap

bulannya. Berapakah modal pinjaman akhirnya dari modal pinjaman tersebut selama 2 tahun?

Penyelesaian:

Diketahui:

$$M_0 = 1.000.000$$

$$m = 12$$

$$n = 2$$

$$i = 6\% = 0,06$$

$$M_n = M_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}$$

$$M_n = 1.000.000 \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{(12)(2)}$$

$$M_n = 1.000.000(1 + 0,005)^{24}$$

$$M_n = 1.000.000(1,005)^{24}$$

$$M_n = 1.000.000(1,127159776205 \dots)$$

$$M_n = 1.127.159,78$$

Jadi modal pinjaman akhirnya sebesar Rp 1.127.159, 78

- 2) Seorang pedagang membutuhkan uang sebesar Rp 5.000.000,00 pada 10 tahun yang akan datang. Berapakah jumlah uang yang harus ditabung mulai dari sekarang jika besar bunga 24% per tahun untuk memperoleh uang yang diinginkan?

Penyelesaian:

Diketahui:

$$M_n = 5.000.000$$

$$m = 1$$

$$n = 10$$

$$i = 24\% = 0,24$$

$$M_n = Mo \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}$$

$$5.000.000 = Mo \left(1 + \frac{0,24}{1}\right)^{(1)(10)}$$

$$5.000.000 = Mo(1,24)^{10}$$

$$5.000.000 = 8,594425 \dots Mo$$

$$Mo = \frac{5.000.000}{8,594425\dots}$$

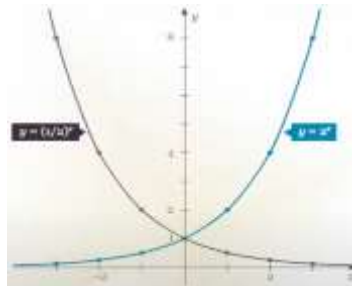
$$Mo = 581.772,49$$

Jadi uang yang harus ditabung mulai dari sekarang adalah Rp 581.772,49

8. Model Pertumbuhan

Model pertumbuhan yang pernah di bahas dalam materi deret juga merupakan bentuk dari fungsi eksponensial. Fungsi ini dapat digunakan untuk menghitung pertumbuhan penduduk suatu negara sehingga laju pertumbuhan penduduk dalam setiap tahun

dapat di prediksi menggunakan fungsi ini. Fungsi ini juga dapat digunakan untuk menaksir variable lain berkenaan dengan pertumbuhannya. Jika digambarkan grafiknya maka grafik tersebut akan terus menerus membesar seiring perkembangan waktu.



- a. Apabila penduduk suatu daerah pada suatu saat mengalami pertumbuhan sebesar 100% per tahun (atau r dalam per tahun), maka setelah t tahun jumlah penduduk tersebut menjadi:

$$P_t = P_o(1 + r)^t$$

- b. Apabila suatu daerah dengan jumlah penduduk yang besar, maka pertumbuhan penduduk berlangsung hamper kontinu. Maka jumlah penduduknya setelah t tahun menjadi:

$$P_t = P_o e^{rt}$$

- c. Misalkan $(r + 1)$ pada persamaan di atas sama dengan R yaitu $(r + 1) = R$, maka persamaan pada poin a dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$P_t = P_o R^t$$

Dimana :

P_t : jumlah penduduk pada tahun ke – t

P_o : jumlah penduduk pada tahun awal yaitu tahun ke 0 (nol)

r : tingkat pertumbuhan

$R = (r + 1)$: tingkat pertumbuhan plus 1

Contoh:

Pada tahun 2010 diadakan sensus penduduk di suatu daerah dengan jumlah penduduk 549.632 jiwa. Dan pada tahun 2015 jumlah penduduknya menjadi 784.331 jiwa. Berapakah tingkat pertumbuhan penduduk kota tersebut? Berapakah perkiraan jumlah penduduk pada tahun 2025?

Penyelesaian :

Diketahui:

$$P_o = 549.632$$

$$P_t = 784.331$$

$$t = 2015 - 2010 = 5$$

$$P_t = P_o(1 + r)^t$$

$$\log P_t = \log P_o(1 + r)^t$$

$$\log P_t = \log P_o + \log(1 + r)^t$$

$$\log P_t = \log P_o + t \log(1 + r)$$

$$\log 784.331 = \log 549.632 + 5 \log(1 + r)$$

$$5,894499 = 5,74007 + 5 \log(1 + r)$$

$$5 \log(1 + r) = 5,894499 - 5,74007$$

$$5 \log(1 + r) = 0,154429$$

$$\log(1 + r) = \frac{0,154429}{5}$$

$$\log(1 + r) = 0,0308858$$

$$(1 + r) = 1,031$$

$$r = 3,1\%$$

Jadi tingkat pertumbuhan penduduk kota tersebut selama periode 2010 sampai 2015 adalah 3,1% per tahun.

Dari tahun 2010 sampai tahun 2025 berarti $t = 15$

$$P_o = 549.632$$

$$t = 15$$

$$r = 0,031$$

$$P_t = P_o(1 + r)^t$$

$$\log P_t = \log P_o(1 + r)^t$$

$$\log P_t = \log P_o + \log(1 + r)^t$$

$$\log P_t = \log P_0 + t \log(1 + r)$$

$$\log P_t = \log 549.632 + 15 \log(1 + 0,031)$$

$$\log P_t = 5,7400 + 15 \log(1,031)$$

$$\log P_t = 5,74 + 15(0,00132)$$

$$\log P_t = 5,74 + 0,1988$$

$$\log P_t = 5,9388$$

$$P_t = 868.560$$

Jadi jumlah penduduk kota pada tahun 2024 diperkirakan sebanyak 868.560 jiwa.

9. Fungsi Gompertz

Fungsi gompertz menggambarkan perkembangan yang lambat laun mulai tumbuh dan waktu mendekati asimtot batas pertumbuhan. Dapat dikatakan juga bahwa fungsi Gompertz ini dapat menghitung permasalahan model pertumbuhan dengan masalah pertumbuhannya dibatasi karena sesungguhnya tidak semua variable bisnis atau ekonomi berpola seperti model pertumbuhan. Sehingga tidak semua masalah harus menggunakan rumus model pertumbuhan.

Ada variable-variabel tertentu yang mempunyai batas-batas maksimum dalam kaitannya dengan perkembangan waktu. Variabel ini meningkat secara eksponensial selama jangka waktu tertentu, tetapi setelah

itu peningkatannya sangat kecil atau bahkan tidak mengalami peningkatan meskipun waktu terus berjalan. Dengan kata lain N cenderung asimtotik terhadap batas maksimum tertentu kendati t tetap membesar. Untuk menganalisis variable yang gejalanya demikian (asimtot terhadap batas jenuh tertentu) fungsi yang tepat digunakan adalah fungsi Gompertz. Bentuk umum dari fungsi Gompertz adalah sebagai berikut:

$$N = c a^{Rt}$$

Dimana:

N : jumlah variable tertentu yang diamati

c : batas jenuh pertumbuhan (asimtot tertinggi/atas)

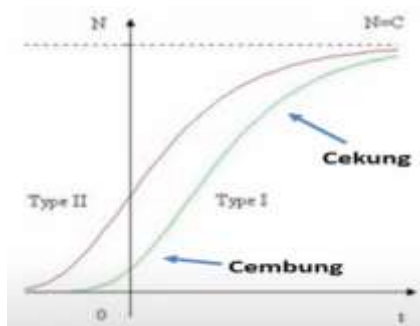
a : proporsi pertumbuhan awal

R : tingkat pertumbuhan rata-rata ($0 < R < 1$)

t : indeks waktu

Sifat utama dari fungsi Gompertz digambarkan dengan dua jenis kurva :

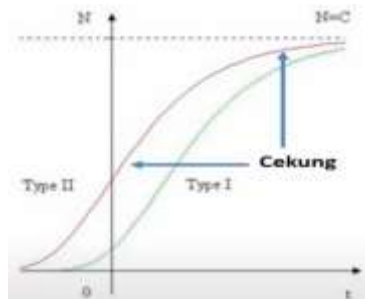
a. Tipe I



$$0 < a < \frac{1}{e}$$

Pada kurva I untuk nilai t kecil yang positif, kurva cembung terhadap sumbu t (berakselerasi positif) dan untuk nilai t besar yang positif, kurva cekung terhadap sumbu t (berakselerasi negatif).

b. Tipe II



$$\frac{1}{e} < a < 1$$

Pada kurva II untuk semua nilai t positif, kurva cekung terhadap sumbu t (berakselerasi negatif).

Pada awalnya kurva yang ditemukan oleh Gompertz ini digunakan oleh para psikolog dan

organisasi-organisasi secara meluas. Kemudian para ekonom memanfaatkannya karena dianggap relevan untuk menggambarkan pola-pola pertumbuhan beberapa variable bisnis dan ekonomi tertentu.

Contoh:

Pertumbuhan jumlah tenaga kerja PT Fast Bojana diperkirakan mengikuti kurva gompertz dengan $N = 100 (0,02)^{0,5t}$

Carilah jumlah tenaga kerja pada awal tahun dan akhir tahun ketiga!

Penyelesaian :

Diketahui :

$$N = 100 (0,02)^{0,5t}$$

Jumlah tenaga kerja pada awal tahun ($t=0$):

$$N = 100 (0,02)^{0,5(0)}$$

$$N = 100 (0,02)$$

$$N = 2$$

Jadi jumlah tenaga kerja awal tahun pada PT Fast Bojana adalah 2 orang.

Jumlah tenaga kerja pada tahun ke-3:

$$N = 100 (0,02)^{0,5(3)}$$

$$\log N = \log 100 + (0,5)^3 \log(0,02)$$

$$\log N = 2 + (0,125)(-1,6989)$$

$$\log N = 2 - 0,2124$$

$$\log N = 1,7876$$

$$N = 61,31$$

Jadi jumlah tenaga kerja pada akhir tahun ke-3 PT Bojana Tirta adalah sebanyak 61 orang.

10. Fungsi Pengajaran

Fungsi pengajaran pada umumnya digunakan oleh para psikolog untuk menggambarkan taraf pertumbuhan Pendidikan manusia yang sifatnya meningkat cepat pada awalnya dan semakin lambat ketika mendekati asimtot batas pertumbuhan. Bentuk umum dari fungsi pengajaran adalah sebagai berikut:

$$y = C - ae^{-kx}$$

Dimana :

C, a dan k : konstanta positif

y : keaktifan belajar

x : variable pendorong

e : bilangan alam atau euler (e = 2,71828...)

Selain digunakan untuk menggambarkan taraf pertumbuhan Pendidikan, fungsi pengajaran ini juga bias dipakai untuk menjelaskan fungsi biaya dan fungsi produksi.

Contoh:

Suatu produk dihasilkan oleh PT Samudra Utama sebanyak y unit perhari dan waktu selama x hari kerja produksi dinyatakan dengan fungsi $y = 200(1 - e^{-0,1x})$. Berapa unit produk yang dihasilkan perhari setelah 10 hari kerja?

Penyelesaian :

Diketahui:

$$y = 200(1 - e^{-0,1x})$$

$$x = 10$$

$$y = 200(1 - e^{-0,1(10)})$$

$$y = 200(1 - e^{-1})$$

$$y = 200(1 - (2,71828 \dots)^{-1})$$

$$y = 200(1 - 0,368)$$

$$y = 200(0,632)$$

$$y = 126,4$$

Jadi barang yang dihasilkan adalah sebanyak 126 unit.

C. Latihan

1. Diketahui:

$$Q_d = 64 - 8P - 2P^2 \text{ dan } Q_s = 10P + 2P^2$$

Tentukan harga keseimbangan pasar dan jumlah keseimbangan pasarnya! Gambarlah kurva keseimbangan pasar tersebut!

2. Pada pasangan fungsi permintaan dan penawaran dari suatu produk berikut $P_d = 25 - 2Q^2$ dan $P_s = Q^2 + 2Q + 1$, tentukan nilai jumlah dan harga keseimbangan pasar serta gambar kurvanya!
3. Tentukan titik keseimbangan pasar dan gambarkan kurvanya dari fungsi $P_d = -Q^2 + Q + 2$ dan $P_s = Q^2 + Q - 2$!
4. Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $TC = 10Q^2 - 80Q + 150$. Pada tingkat produksi berapa unit biaya total minimum? Hitunglah besarnya biaya tetap, biaya variabel, biaya rata-rata, biaya tetap rata-rata dan biaya variabel rata-rata pada tingkat produksi tersebut!
5. Diketahui fungsi biaya produksi suatu perusahaan $TC = 0,4Q^2 + 60Q + 5600$. Apabila besar produksi adalah $Q = 100$ unit. Hitunglah besarnya TC, AC, TVC, AVC, AFC dan MC!
6. Fungsi permintaan yang dihadapi oleh seorang produsen monopolis ditunjukkan oleh $P = 500 - 2Q_d$. Berapakah besar penerimaan total jika jumlah barang yang terjual

- sebanyak 100 unit. Berapa besar penerimaan total jika jumlah barang yang terjual meningkat menjadi 200 unit?
7. Suatu fungsi produksi yang dihadapi sebuah perusahaan adalah $TP = 9L^2 - L^3$. Bentuklah persamaan produk rata-rata tersebut jika digunakan tenaga kerja sebanyak 10.
 8. Sebuah pabrik masker merek Clean Covid mempunyai biaya tetap $FC = \text{Rp } 20.000.000,00$. Biaya yang diperlukan untuk membuat sebuah masker adalah $\text{Rp } 10.000,00$. Apabila masker tersebut dijual dengan harga $\text{Rp } 20.000,00$ per satuan, berapa besarnya biaya variabel, biaya total dan penerimaan total? Pada saat kapan pabrik mengalami BEP?
 9. Sebuah perusahaan yang memproduksi sikat gigi mempunyai biaya tetap (FC) = $\text{Rp } 10.000.000,00$. Biaya untuk membuat sebuah sikat gigi $\text{Rp } 5.000,00$. Apabila sikat gigi tersebut dijual dengan harga $\text{Rp } 10.000,00$ maka tentukanlah:
 - a. Fungsi biaya total, fungsi penerimaan total dan variable cost.
 - b. Pada saat kapan perusahaan mengalami BEP?
 - c. Untung atau rugikah jika perusahaan memproduksi 12.000 unit?
 10. Seorang nasabah meminjam uang di bank Berlian sebanyak $\text{Rp } 13.000.000,00$ untuk jangka waktu 7 tahun dengan tingkat bunga 2% per tahun. Berapa jumlah seluruh uang yang harus dikembalikannya pada saat pelunasan?

11. Damai menabung di bank Nusantara sebesar Rp 10.000.000,00 selama 1 tahun. Jika dalam satu tahun ia tidak melakukan penambahan dan pengurangan tabungan. Berapakah besar bunga yang diperoleh Damai setelah 1 tahun ia menabung jika bank memberikan suku bunga 1,5% per triwulan?
12. Jumlah penduduk kota Pondok Ceria adalah 1.000.000 jiwa pada tahun 2020. Tingkat pertumbuhannya 4% per tahun. Hitunglah jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 2025!
13. Penduduk kota Vrindavan pada tahun 1990 adalah 2.000.000 jiwa. Tingkat pertumbuhan penduduk disana konstan 5% per tahun sampai dengan tahun 1996. Jika setelah 1996 pertumbuhan penduduk disana turun menjadi 3%. Berapa jumlah penduduknya 11 tahun kemudian setelah tahun 1996?
14. Sebuah pabrik sepatu di Cibaduyut mempunyai karyawan 30 orang pada awalnya. Dikarenakan usahanya berkembang, jumlah karyawan yang dipekerjakan meningkat rata-rata 30% per tahun. Berdasarkan pertimbangan bisnis, sang manajer memutuskan tidak akan mempekerjakan lebih dari 500 orang karyawan. Bentuklah persamaan penggunaan tenaga kerja di pabrik tersebut! Berapa jumlah karyawan yang dipekerjakan setelah pabrik tersebut beroperasi 6 tahun?

D. Referensi

- Dumairy. (2010) Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, BPFE, Yogyakarta.
- Hamidah, dkk. (2020) Matematika Ekonomi 1 dan 2 untuk Analisa Ekonomi, Bisnis dan Ilmu Sosial. Surabaya : Scopindo Media Pustaka.
- Johannes, dkk. (1982) Pengantar Matematika untuk Ekonomi. Jakarta: LP3ES.
- K.I, Majid. (1972) Non-Linear Structures. London : The Butterworth Group
- Mesra, B. (2016) Penerapan Ilmu Matematika dalam Ekonomi dan Bisnis. Yogyakarta: CV Budi Utama.
- Olivier, J. (2017) Business Math: A Step by Step Handbook. Canada: Creative Commons License (CC BY-NC-SA).
- Putrodjoyo G dan Untung Rahardja. (2015) Matematika Ekonomi. Jakarta: PT. Grasindo.
- Rifa'i Rusdian. (2016) Aljabar Matriks Dasar. Yogyakarta: Deepublish.
- Rinaldi. (2020). Buku Ajar Matematika Ekonomi. Jakarta: FEB Universitas Persada Indonesia.
- Rinaldi. (2020). Buku Ajar Matematika Ekonomi. Jakarta: FEB Universitas Persada Indonesia

PERTEMUAN X

LIMIT FUNGSI AL-JABAR

A. Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini diharapkan mahasiswa mampu :

1. Mengetahui konsep limit fungsi
2. Mengetahui komponen-komponen limit fungsi
3. Mengetahui cara penyelesaian sebuah fungsi
4. Mengetahui Limit fungsi trigonometri

B. Materi

1. Konsep Limit

Dalam kehidupan sehari-hari sering kali kita jumpai kata “hampir” ataupun “mendekati”. Misalnya, kebakaran yang terjadi di wilayah A menimbulkan kerugian hampir 1 milyar rupiah. Kata hampir dalam kalimat sebelumnya jika berada dalam matematika disebut limit.

Limit secara harfiah memiliki makna batas. Limit juga dapat diartikan sebagai pendekatan. Jika dihubungkan, limit adalah suatu batasan dengan menggunakan konsep pendekatan. Dimana, yang bisa dibilang limit ialah nilai yang mendekati fungsi x . Dengan

kata lain, limit menyatakan bahwa suatu fungsi x akan mendekati nilai tertentu jika x mendekati nilai tertentu.

Dalam kalkulus, pengertian limit sendiri ternyata adalah gagasan yang sangat penting. Di kehidupan sehari-hari sering pula kita temukan perkataan limit. Seperti “saya mendekati batas kesabaran saya”. Pemakaian tersebut memiliki sangkutan terhadap kalkulus, tetapi tentu tidak banyak.

Untuk lebih memperdalam limit berikut ilustrasinya!

Contoh terdapat sebuah fungsi $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2}$ $x \neq 2$.

Maka coba tentukanlah nilai

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ Untuk mendapatkan nilai suatu limit fungsi dari aljabar $\rightarrow a$ kita dapat melihat tabel yang terdapat di bawah berikut ini :

x mendekati 2 dari kiri					↓	x mendekati 2 dari kanan				
x	1,8	1,9	1,99	1,9999	2	2,000001	2,0001	2,001	2,05	2,1
$f(x)$	3,8	3,9	3,99	3,9999	...	4,000001	4,0001	4,001	4,05	4,1
$f(x)$ mendekati 4					↑	$f(x)$ mendekati 4				

Dari tabel tersebut maka jika disubstitusikan x dari kiri didapatkan bahwa nilainya mendekati 4, sebaliknya apabila disubstitusikan x dari kanan maka didapatkan bahwa nilai yang didapatkan pun akan mendekati 4. Dari hasil tersebut kita bisa mengetahui dan dituliskan seperti berikut ini

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Dimana :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} \\ &= (x + 2) \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Limit dapat dituliskan seperti berikut ini :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

pada tabel diatas dapat diartikan, jika didapatkan x mendekati A tetapi x tidak sama dengan A maka $f(x)$ mendekati L . perkiraan hubungan x ke A bisa dilihat dari kedua sisi tersebut yaitu dari sisi kanan dan dari sisi kiri atau dengan maksud lain x bisa mendekati dari arah sisi kanan dan arah sisi kiri sehingga dapat diketahui hasil dari suatu limit kanan dan limit kiri

Penjelasan

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \rightarrow c} f(x) \\ = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \end{aligned}$$

Sebuah fungsi dapat di sebut memiliki suatu limit

jika limit kiri dan limit kanan sama nilainya, dan sebaliknya

jika limit kiri dan limit kanan tidak sama, maka nilai dari limitnya tidak ada.

a. Sifat – sifat limit fungsi

Limit fungsi dapat ditentukan jika n adalah bilangan bulat positif, k adalah konstanta, f dan g adalah fungsi yang memiliki limit di c . Sifat ini berlaku pada teorema limit fungsi.

b. Teorema limit fungsi

Setelah mengetahui sifat – sifat limit fungsi, selanjutnya adalah berlakunya teorema – teorema berikut :

1) $\lim_{x \rightarrow c} k = k$

Contoh

$$\lim_{x \rightarrow 2} 4 = 4$$

2) $\lim_{x \rightarrow c} x = c$

Contoh :

$$\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$$

3) $\lim_{x \rightarrow c} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

Contoh :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} 4x^2 &= 4 [\lim_{x \rightarrow 2} x^2] \\ &= 4 \cdot (2)^2 \\ &= 4 \cdot 4 \\ &= 16\end{aligned}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow c} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

Contoh

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 5x) &= \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 5x \\ &= 3^2 + 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x \\ &= 9 + 5 \cdot 3 \\ &= 9 + 15 \\ &= 24 \end{aligned}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow c} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

Contoh

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (5x^2 - 2x) &= \lim_{x \rightarrow 3} 5x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 2x \\ &= 5(3)^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 2x \\ &= 45 - 2 \cdot 3 \\ &= 45 - 6 \\ &= 39 \end{aligned}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow c} f(x) \times g(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \times \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

Contoh

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (x^2, x) &= \lim_{x \rightarrow 3} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x \\ &= (-3)^2 \cdot (-3) \\ &= 9 \cdot (-3) \\ &= -18 \end{aligned}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} \text{ dengan } \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$$

Contoh :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2 + 5}{x + 1} \right] &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 5}{\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1} \\ &= \frac{1^2 + 5}{1 + 1} \\ &= \frac{1 + 5}{2} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$$

Contoh :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} [4x^2 - 1]^3 &= [\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 1)^3] \\ &= [4(1)^2 - 1]^3 \\ &= [4 - 1]^3 \\ &= [3]^3 \\ &= 27 \end{aligned}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} \text{ dengan } \lim_{x \rightarrow c} f(x) \geq 0$$

Contoh :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt[3]{x^2 + 2} &= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 2)} \\ &= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 5} x^2 + \lim_{x \rightarrow 5} 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt[3]{5^2 + 2} \\
&= \sqrt[3]{25 + 2} \\
&= \sqrt[3]{27} \\
&= \sqrt[3]{3^3} \\
&= 3^{\frac{3}{3}} \\
&= 3^1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

c. Mencari nilai limit fungsi

1) Bila variabelnya mendekati nilai tertentu

Dalam materi ini, ada 3 metode untuk mencari nilai limit fungsi, yaitu :

a) Metode substitusi

Metode ini adalah cara yang paling dasar untuk mencari nilai limit, dimana dilakukan dengan cara mensubstitusikan langsung nilai ke dalam fungsi x .

Contoh :

(1) Jika diketahui fungsi limit $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 5)$ maka berapakah nilai dari fungsi tersebut dengan metode substitusi ?

Penyelesaian :

Yang harus diperhatikan pada saat menyelesaikan limit adalah nilai x yang berada tepat dibawah kata $\lim_{x \rightarrow 1}$, maka

angka 1 kita ganti dengan x yang berada dalam fungsi limit tersebut.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 5) &= (2(1)^2 + 5) \\ &= 7\end{aligned}$$

(2) Jika diketahui $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - px + 6) = -1$

Maka, nilai p yang memenuhi adalah...

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - px + 6) = -1$$

$$3(2)^2 - p(2) + 6 = -1$$

$$12 - 2p + 6 = -1$$

$$12 - 2p = -1$$

$$2p = 13 + 1$$

$$2p = 14$$

$$p = 7$$

b) Metode Pemfaktoran

Metode ini memiliki aturan khusus, dimana jika metode substitusi menghasilkan suatu nilai tak tentu seperti :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, \text{atau } \infty^\infty$$

Dalam kasus seperti ini, fungsi harus difaktorkan terlebih dahulu, lalu setelahnya disubstitusikan.

Contoh :

Tentukan nilai dari fungsi limit berikut ini :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$$

Penyelesaian :

dengan substitusi menghasilkan, $f(x) =$

$$\frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

maka, kita selesaikan soal dengan metode pemfaktoran sehingga menjadi :

$$= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = (x+2).$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)$$

$$= 2 + 2$$

$$= 4$$

c) Metode mengalikan dengan faktor sekawan

Metode ini juga memiliki aturan khusus seperti halnya pemfaktoran, yaitu pada saat metode substitusi menghasilkan nilai tak tentu dan khusus juga untuk soal limit yang fungsinya memiliki bentuk akar.

Contoh :

Tentukan nilai dari fungsi limit berikut ini :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{x-2}$$

Penyelesaian :

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{x-2} \cdot \frac{2 + \sqrt{x+2}}{2 + \sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - (x+2)}{(x-2)(2 + \sqrt{x+2})}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)(2+\sqrt{x+2})} \\
&= \frac{-1}{2+\sqrt{2+2}} \\
&= \frac{-1}{2+\sqrt{4}} \\
&= \frac{-1}{4}
\end{aligned}$$

2) Bila variabelnya mendekati tak hingga

Limit tak hingga merupakan suatu gambaran pada saat keadaan limit x mendekati tak hingga. Terdapat 2 cara untuk menyelesaikan limit tak hingga dari suatu fungsi aljabar, yaitu :

a) Metode Membagi dengan pangkat tertinggi

Metode ini digunakan dalam mencari nilai limit tak hingga dengan cara membagi pangkat tertinggi dengan semua angka yang ada dalam fungsi tersebut.

Contohnya

Tentukanlah hasil dari limit fungsi berikut :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 4x + 1}{2x^2 + 7x}$$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 4x + 1}{2x^2 + 7x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 4x + 1}{\frac{x^2}{\frac{2x^2 + 7x}{x^2}}}$$

Diketahui besaran dari pangkat pembilangnya dan penyebutnya adalah 2, maka

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{7x}{x^2}} \\
 &= \frac{6 - \frac{4}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}}{2 + \frac{7}{\infty}} \\
 &= \frac{6 - 0 - 0}{2 + 0} \\
 &= \frac{6}{2} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Maka, hasil yang didapatkan dari limit fungsi tersebut adalah

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 4x + 1}{2x^2 + 7x} = 3$$

b) Metode mengalikan dengan faktor lawan

Metode ini merupakan cara mencari soal limit yang fungsinya memiliki bentuk akar, dengan cara mengalikan dengan faktor lawannya.

Contoh :

Tentukan nilai dari fungsi limit berikut ini :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 2x}$$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 2x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 2x}}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 3x) - (x^2 + 2x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{\infty}} + \sqrt{1 + \frac{2}{\infty}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 + 0}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

d. Menentukan Limit fungsi trigonometri

Jika limit merupakan kendala/batasan menggunakan konsep pendekatan. Atau kita dapat mengatakan bahwa limit adalah pernyataan bahwa fungsi x mendekati suatu nilai tertentu ketika fungsi x mendekati suatu nilai tertentu. Oleh karena itu, trigonometri adalah cabang matematika yang berhubungan dengan fungsi trigonometri dan

penerapannya pada segitiga. Apa itu Trigonometri? Secara harfiah, "trigonon" berarti tiga sudut, dan "metron" adalah skala. Oleh karena itu trigonometri adalah cabang matematika yang berhubungan dengan hubungan antara sudut dan panjang sisi. Trigonometri sendiri tidak berlaku untuk semua bentuk datar, tetapi untuk segitiga.

Dalam limit trigonometri terdapat rumus penting, yaitu :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Berikut merupakan metode metode untuk penyelesaian limit fungsi trigonometri. Pendekatan substitusi langsung, metode rumus dasar limit fungsi trigonometri, metode pemfaktoran serta metode penyederhanaan fungsi trigonometrinya adalah empat cara untuk menyelesaikan fungsi trigonometri

1) Menggunakan metode substitusi langsung

Untuk menerapkan metode substitusi langsung sangat sederhana yaitu dengan cara mengganti X dengan angka yang terdapat pada soal

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Berikut adalah penggunaan metode substitusi langsung

Contoh

Berikut juga disajikan tabel dari metode substitusi tersebut

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{2\pi}{4} = \sin 90^\circ = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \tan 3x + 2 = \tan 3 \left(\frac{3\pi}{4} \right) + 2 = \tan(40^\circ) + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin 0}{\sin 0 + \cos 0} = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2 \cos 2x} = \frac{1 - \cos 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)}{2 \cos 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)} = \frac{1 - (-1)}{2(-1)} = \frac{1+1}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Berikut juga disajikan tabel dari metode substitusi tersebut

	0°	30°	45°	60°	90°
<i>sina</i>	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
<i>cosa</i>	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{2}{1}\sqrt{2}$	$\frac{2}{1}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

<i>tga</i>	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{\frac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}}$	$\frac{1}{\frac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}}\sqrt{2}$	$\frac{1}{\frac{2}{\frac{1}{2}}}\sqrt{3}$	$\frac{1}{0}$
	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{3}$	<i>tidak terdefinisi</i>

2) Metode rumus dasar limit fungsi trigonometri

Rumus dasar dari limit fungsi trigonometri adalah

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b} \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}
 \end{array}$$

Berikut contoh penyelesaian limit fungsi trigonometri yang menggunakan metode rumus dasar limit fungsi trigonometri

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 5x}{3x \tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan 2x} = \frac{1}{3} \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \cdot \sin 2x}{3 \cdot x \cdot x} \\
 \qquad \qquad \qquad \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{8}{3}
 \end{array}$$

3) Metode pemfaktoran

Dalam metode pemfaktoran ini konsep penyelesaiannya identik dengan yang sebelumnya yaitu metode pemfaktoran dalam limit fungsi aljabar yang kita sudah ketahui sebelumnya, cara ini digunakan ketika ditemukan jawaban dengan bentuk yang tidak dapat didefinisikan dan tak tentu.

Berikut contoh penyelesaian dengan metode pemfaktoran

Tentukanlah nilai limit fungsi trigonometri berikut ini

$$\begin{aligned}\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x(x+2)} \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0+2} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)(2x+3)}{x^2+4x-5} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+5)} \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)} \right] \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+3)}{(x+5)} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1. \frac{2(1) + 3}{(1 + 5)} \\
 &= \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{x^2-2x+1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{(x-1)(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)}{(x-1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{(x-1)} \\
 &= 1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} \\
 &= -1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1+\sqrt{x})} \\
 &= -1.1. \frac{1}{1+\sqrt{1}} \\
 &= -1.1. \frac{1}{2} \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

4) Metode menyederhanakan fungsi trigonometrinya

Untuk dapat menyelesaikan dengan menggunakan metode ini kita harus melihat dan mengingat rumus rumus dari trigonometri. Berikut merupakan contoh penyelesaiannya.

Tentukanlah nilai limit fungsi dari :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x} =$$

Jika kita mensubstitusikan nilai x dengan 0 maka akan didapatkan hasil tidak terdefinisi, dalam kasus ini kita harus merubah $\cos x$ menjadi fungsi lain

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos^2 \frac{1}{2}x - \sin^2 \frac{1}{2}x)}{2x \sin x}$$

Ingat kembali rumus

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \text{maka } \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \\ \sin^2 \frac{1}{2}x &= 1 - \cos^2 \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 \frac{1}{2}x) + \sin^2 \frac{1}{2}x}{2x \sin x}$$

Ingat kembali rumus

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \cos x &= \cos^2 \frac{1}{2}x - \sin^2 \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}x + \sin^2 \frac{1}{2}x}{2x \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}x}{2x \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin \frac{1}{2}x}{2x \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{1}{2}x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\sin x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x + \sin x = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} +$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

C. Latihan

Selesaikanlah bentuk limit berikut ini:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 + 5x - 2)$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 4)$

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x + 8}{2x^2 + 5x}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 4}{x^2 - 2}$

7) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} 2 - \cos x$

9) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x \sin 2x}$

D. Referensi

Dumairy. 2010. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE.

Kalangi, Josep Bintang. 2014. *Matematika Ekonomi dan Bisnis Edisi ke-3*. Jakarta: Salemba Empat.

Wirawan, Nata. 2017. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Denpasar: Keraras Emas.

PERTEMUAN XI

LIMIT DAN KESINAMBUNGAN FUNGSI

A. Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini diharapkan mahasiswa mampu :

1. Mengetahui dan memahami Limit sisi-kiri sisi-kanan
2. Mengetahui dan memahami Kaidah-kaidah Limit
3. Mengetahui dan memahami Kesenambungan Fungsi
4. Mengetahui dan memahami Penerapan Ekonomi

B. Materi

1. Limit

Limit menggambarkan seberapa besar sebuah fungsi akan berkembang apabila variasi didalam fungsi yang bersangkutan terus menerus berkembang mendekati suatu nilai tertentu. Untuk menggambarkan $y = f(x)$ akan dapat diketahui limit dan atau batas perkembangannya $f(x)$ ini apabila variabel x terus menerus berkembang hingga mendekati suatu nilai tertentu.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Di baca “Limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati a adalah L ” artinya jika variabel x terus bertambah secara terus menerus hingga mendekati bilangan tertentu a , maka nilai fungsi $f(x)$ pun akan berkembang pula hingga mendekati L .

Misalnya, kebakaran yang terjadi di wilayah A menimbulkan kerugian hampir 1 milyar rupiah. Kata hampir dalam kalimat sebelumnya jika berada dalam matematika disebut limit.

Limit secara harfiah memiliki makna batas. Limit juga dapat diartikan sebagai pendekatan. Jika dihubungkan, limit adalah suatu batasan dengan menggunakan konsep pendekatan. Dimana, yang bisa terbilang limit ialah nilai yang mendekati fungsi x . Dengan kata lain, limit menyatakan bahwa suatu fungsi x akan mendekati nilai tertentu jika x mendekati nilai tertentu.

2. Limit sisi-Kiri, Limit Sisi-Kanan

Kesinambungan atau ketidaksinambungan menjadi konsep dasar penting dalam kalkulus. Suatu fungsi dikatakan sinambung (*continuous*) jika gambar dari kurva tersebut tidak terputus artinya ketika kita menggambar kurva, kita tidak perlu lagi mengangkat alat tulis yang kita gunakan, akan tetapi kita hanya cukup menggeserkannya ke arah yang akan dituju.

Jika dalam menggambarkan suatu kurva kita terpaksa mengangkat alat tulis pada suatu titik tertentu,

maka fungsi yang tersebut disebut sebagai fungsi asinambung (*discontinuous*) atau terputus pada titik tertentu.

Sebuah fungsi $f(x)$ disebut sinambung pada $x = a$ jika :

- a. $f(a)$ terdefinisi
- b. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ terdefinisi

$$x \rightarrow a$$

- c. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$x \rightarrow a$$

Fungsi $f(x)$ disebut sinambung dalam sebuah interval dimana $b \leq x \leq c$ atau $b < x < c$ dan fungsi $f(x)$ disebut tidaksinambung (asinambung) pada sebuah titik dimana $x = a$.

Ketidaksinambungan (asinambung) sebuah fungsi bisa terjadi pada salah satu kemungkinan berikut ini :

a. Asinambung Berhingga

Sebuah fungsi $f(x)$ disebut asinambung berhingga pada $x = a$ jika $f(x)$ bernilai positif atau negatif takterhingga untuk $x \rightarrow a$. Artinya jika dalam suatu fungsi $f(x)$ memperoleh nilai tidak terdefinisi dan $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ juga memperoleh nilai tidak terdefinisi maka hal ini disebut dengan asinambung berhingga.

Contoh :

Tentukanlah bentuk dari fungsi $f(x) = \frac{9}{(x-3)^2}$ apakah termasuk asinambung berhingga, asinambung tak berhingga atau asinambung titik ? serta ilustrasikan dalam bentuk grafik !

Penyelesaian :

Langkah pertama yang harus kita lakukan ialah menyelesaikan fungsi tersebut dengan mengganti nilai x dengan angka 3 (misal $x=3$)

$$f(x) = \frac{9}{(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{9}{(3-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{9}{0}$$

$$f(x) = \infty$$

Artinya hasil penyelesaian dari fungsi $f(x) = \frac{9}{(x-3)^2}$ diperoleh hasil ∞ (tidak terdefinisi).

Kemudian Langkah kedua ialah menyelesaikan fungsi tersebut dalam bentuk limit yaitu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{9}{(x-3)^2}$ dengan metode substansi dimana $x=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} = \frac{9}{(x-3)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} = \frac{9}{(3-3)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} = \frac{9}{(3-3)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} = \frac{9}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} = \infty$$

Artinya hasil penyelesaian dari limit fungsi limit yaitu $\lim_{x \rightarrow 3} = \frac{9}{(x-3)^2}$ diperoleh hasil ∞ (tidak terdefinisi).

Kesimpulan dari kedua Langkah tersebut diperoleh hasil fungsi $f(x) = \frac{9}{(x-3)^2}$ tidak terdefinisi dan $\lim_{x \rightarrow 3} = \frac{9}{(x-3)^2}$ juga tidak terdefinisi maka bentuk dari fungsi $f(x) = \frac{9}{(x-3)^2}$ dan $\lim_{x \rightarrow 3} = \frac{9}{(x-3)^2}$ disebut sebagai asinambung berhingga.

Ilustrasi fungsi $f(x) = \frac{9}{(x-3)^2}$ dalam sebuah grafik ialah sebagai berikut :

Jika kita misalkan nilai $x=0$ maka $f(x)$?

$$f(x) = \frac{9}{(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{9}{(0-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{9}{(-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{9}{9}$$

$$f(x) = 1$$

Artinya jika $x = 0$ maka $f(x) = 1$

Jika kita misalkan nilai $x = 1$ maka $f(x)$?

$$f(x) = \frac{9}{(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{9}{(1-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{9}{(-2)^2}$$

$$f(x) = \frac{9}{4}$$

$$f(x) = 2,25$$

Artinya jika $x = 1$ maka $f(x) = 2,25$

Jika kita misalkan nilai $x = 2$ maka $f(x)$?

$$f(x) = \frac{9}{(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{9}{(2-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{9}{(-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{9}{1}$$

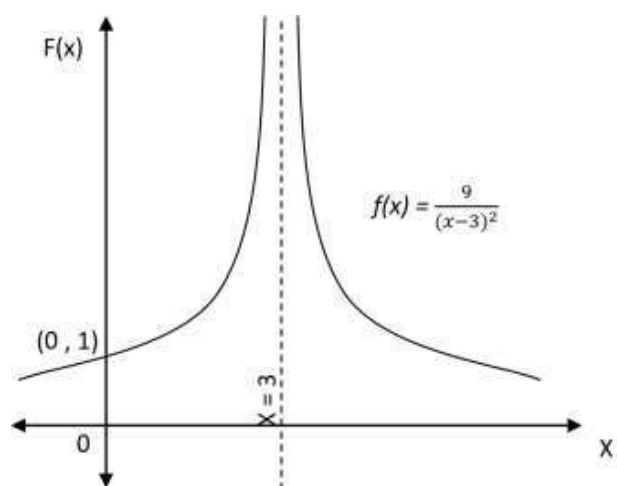
$$f(x) = 9$$

Artinya jika $x = 2$ maka $f(x) = 9$

Berikut sajian dalam bentuk tabel :

x	0	1	2	3	4	5	6
F(x)	1	2,25	9	∞	9	2,25	1

berdasarkan perhitungan tersebut maka diperoleh grafik sebagai berikut:



b. Asinambung Tak Berhingga

Sebuah fungsi disebut Asinambung tak berhingga jika dalam suatu fungsi $f(x)$ memperoleh nilai

terdefinisi akan tetapi dalam fungsi limit $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ berubah drastis $x \rightarrow a$

pada saat $x = 0$ sebab hasil dari fungsi limit memperoleh nilai tidak terdefinisi.

Contoh :

Tentukanlah bentuk dari fungsi $f(x) = \frac{3}{x}$ apakah termasuk asinambung berhingga atau asinambung titik ? serta ilustrasikan dalam bentuk grafik !

Penyelesaian :

Langkah pertama yang harus kita lakukan ialah menyelesaikan fungsi tersebut dengan mengganti nilai x dengan angka -3 (misal $x = -3$)

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

$$f(x) = \frac{3}{-3}$$

$$f(x) = -1$$

Artinya hasil penyelesaian dari fungsi $f(x) = \frac{3}{x}$ diperoleh hasil -1 jika $x = -3$ (terdefinisi).

Misal Jika $x = 0$

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

$$f(x) = \frac{3}{0}$$

$$f(x) = \infty$$

Artinya hasil penyelesaian dari fungsi $f(x) = \frac{3}{x}$ diperoleh hasil ∞ jika $x = 0$ (tidak terdefinisi).

Kemudian Langkah kedua ialah menyelesaikan fungsi tersebut dalam bentuk limit yaitu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{3}{x}$

dengan metode substitusi dimana $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \infty$$

Artinya hasil penyelesaian dari fungsi limit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x}$ diperoleh hasil ∞ jika $x = 0$ (tidak terdefinisi).

Kesimpulan dari kedua Langkah tersebut diperoleh hasil fungsi $f(x) = \frac{3}{x}$ terdefinisi tetapi berubah drastis pada saat $x = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x}$ tidak terdefinisi maka bentuk dari fungsi $f(x) = \frac{3}{x}$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x}$ disebut sebagai asinambung tak berhingga.

Ilustrasi fungsi $f(x) = \frac{3}{x}$ dalam sebuah grafik ialah sebagai berikut :

Jika kita misalkan nilai $x=1$ maka $f(x)$?

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

$$f(x) = \frac{3}{1}$$

$$f(x) = 3$$

Jika kita misalkan nilai $x = 2$ maka $f(x)$?

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

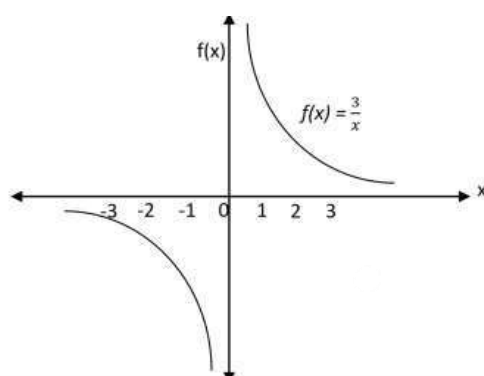
$$f(x) = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = 1,5$$

Berikut sajian dalam bentuk tabel :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
F(x)	-1	-1,5	-3	∞	3	1,5	1

Berdasarkan perhitungan tersebut maka diperoleh grafik sebagai berikut :



$$f(0) = 3/0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Karena limit sisi kiri $\neq$ sisi kanan maka

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ tidak terdefinisi

c. Asinambung Titik

Sebuah fungsi disebut Asinambung titik jika dalam suatu fungsi $f(x)$ memperoleh nilai tidak terdefinisi akan tetapi dalam fungsi limit $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ memperoleh nilai terdefinisi

Contoh :

- 1) Tentukanlah bentuk dari fungsi $f(x) = \frac{(x^4-4)}{(x-2)}$ apakah termasuk asinambung berhingga, asinambung tak berhingga atau asinambung titik ? serta ilustrasikan dalam bentuk grafik !

Penyelesaian :

Langkah pertama yang harus kita lakukan ialah menyelesaikan fungsi tersebut dengan menggantini nilai x dengan angka 2 (misal $x=2$)

$$(f(x)) = \frac{(x^2 - 4)}{(x - 2)}$$

$$(f(x)) = \frac{(2^2 - 4)}{(2 - 2)}$$

$$(f(x)) = \frac{(x^2 - 4)}{(x - 2)}$$

$$(f(x)) = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \infty$$

Artinya hasil penyelesaian dari fungsi $f(x) = \frac{(x^2-4)}{(x-2)}$ diperoleh hasil ∞ (tidak terdefinisi).

Kemudian Langkah kedua ialah menyelesaikan fungsi tersebut dalam bentuk limit yaitu $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{(x^2-4)}{(x-2)}$ dengan metode pemfaktoran dimana $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} = \frac{(x^2 - 4)}{(x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} = \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{(x - 2)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} = x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} = 2 + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} = 4$$

Artinya hasil penyelesaian dari limit fungsi limit yaitu $\lim_{x \rightarrow 2} = \frac{(x^2-4)}{(x-2)}$ diperoleh hasil 4 (terdefinisi).

Kesimpulan dari kedua Langkah tersebut diperoleh hasil fungsi $f(x) = \frac{(x^2-4)}{(x-2)}$ tidak terdefinisi dan $\lim_{x \rightarrow 2} = \frac{(x^2-4)}{(x-2)}$ terdefinisi maka bentuk dari fungsi $f(x) = \frac{(x^2-4)}{(x-2)}$ dan $\lim_{x \rightarrow 2} = \frac{(x^2-4)}{(x-2)}$ disebut sebagai asinambung titik.

Ilustrasi fungsi $f(x) = \frac{(x^2-4)}{(x-2)}$ dalam sebuah grafik

ialah sebagai berikut :

Jika kita misalkan nilai $x=0$ maka $f(x)$?

$$f(x) = \frac{(x^2 - 4)}{x - 2}$$

$$f(x) = \frac{(0^2 - 4)}{0 - 2}$$

$$f(x) = \frac{-4}{-2}$$

$$f(x) = 2$$

Artinya jika $x=0$ maka $f(x)=2$

Jika kita misalkan nilai $x=1$ maka $f(x)$?

$$f(x) = \frac{(x^2 - 4)}{x - 2}$$

$$f(x) = \frac{(1^2 - 4)}{1 - 2}$$

$$f(x) = \frac{-3}{-1}$$

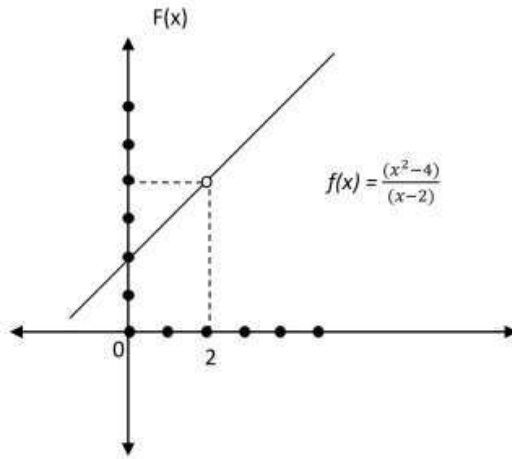
$$f(x) = 3$$

Artinya jika $x = 1$ maka $f(x)=3$

Berikut sajian dalam bentuk tabel :

x	0	1	2	3	4	5
F(x)	2	3	4	5	6	7

Berdasarkan perhitungan tersebut maka diperoleh grafik sebagai berikut :



- 2) Tentukanlah bentuk dari fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$ apakah termasuk asinambung berhingga, asinambung tak berhingga atau asinambung titik?

Penyelesaian :

Langkah pertama yang harus kita lakukan ialah menyelesaikan fungsi tersebut dengan menggantikan x dengan angka 5 (misal $x=5$)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$$

$$f(x) = \frac{5^2 - 2(5) - 15}{5 - 5}$$

$$f(x) = \frac{25 - 10 - 15}{5 - 5}$$

$$f(x) = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \infty$$

Artinya hasil penyelesaian dari fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$ diperoleh hasil ∞ (tidak terdefinisi).

Kemudian Langkah kedua ialah menyelesaikan fungsi tersebut dalam bentuk limit yaitu $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$ dengan metode pemfaktoran dimana $x=5$:

$$\lim_{x \rightarrow 5} = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} = \frac{(x - 5)(x + 3)}{(x - 5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} = \frac{(x - 5)(x + 3)}{(x - 5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} = x + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} = 5 + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} = 8$$

Artinya hasil penyelesaian dari limit fungsi limit yaitu $\lim_{x \rightarrow 5} = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$ diperoleh hasil 8 (terdefinisi).

Kesimpulan dari kedua Langkah tersebut diperoleh hasil fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$ tidak terdefinisi dan $\lim_{x \rightarrow 5} = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$ terdefinisi maka bentuk dari fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$ dan $\lim_{x \rightarrow 5} = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$ disebut sebagai asinambung titik.

C. Latihan

Tentukanlah bentuk dari fungsi-fungsi berikut ini, apakah termasuk asinambung berhingga, asinambung tak berhingga atau asinambung titik ? serta ilustasikan dalam bentuk grafik!

1. $f(x) = 10x^3 - 21x^2 - 10x$

2. $f(x) = \frac{x^2-49}{x+7}$

3. $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$

4. $f(x) = \frac{8}{x}$

5. $f(x) = x^{-1}$

6. $f(x) = \frac{2x}{3-x}$

7. $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$

8. $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-3}$

9. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

10. $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$

D. Referensi

Dumairy. 2017. "*Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*". Edisi 2003/2004. Cet. 12. Yogyakarta: BPFE.

Kalangi, Josep Bintang. 2014. *Matematika Ekonomi dan Bisnis Edisi ke-3*. Jakarta : Salemba Empat.

Sillean, S. 2011. "*Matematika Untuk Bisnis dan Ekonomi*".
Jakarta: Mitra Wacana Media.

Wirawan, Nata. 2017. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*.
Denpasar : Keraras Emas.

PERTEMUAN XII

DIFERENSIAL FUNGSI

A. Capaian Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini, diharapkan mahasiswa mampu:

1. Memahami konsep differensial.
2. Memahami kaidah-kaidah differensial.
3. Menghitung bentuk differensial berdasarkan kaidah-kaidahnya.

B. Materi

1. Kuosien Diferensi dan Derivatif

Diferensial disebut juga dengan turunan. Secara definisi diferensial atau turunan dapat diartikan sebagai tingkat perubahan suatu fungsi karena perubahan kecil (mendekati nilai nol) pada variabel bebasnya. Seperti yang telah diketahui bahwa dalam suatu fungsi terdapat variabel terikat dan variabel bebas, sehingga apabila terjadi perubahan pada variabel bebas maka akan mempengaruhi nilai dari variabel terikatnya. Jika $y = f(x)$, dan variabel bebas x bertambah sebesar Δx , maka persamaan perubahannya adalah :

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \dots\dots\dots (i)$$

Δx tersebut merupakan tambahan x dan Δy merupakan tambahan y berkenaan dengan adanya tambahan x . Sehingga Δy muncul karena adanya Δx . Jika persamaan (i) di atas kedua ruasnya sama-sama dibagi dengan Δx , maka diperoleh:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \dots\dots\dots (ii)$$

Bentuk $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pada persamaan (ii) inilah yang disebut dengan difference question atau persamaan perubahan yang memperlihatkan tingkat perubahan pada variabel terikat y karena ada perubahan pada variabel bebas x .

Contoh:

Tentukan kuosien diferensiaasi dari $y = f(x) = 4x^2$!

Penyelesaian:

$$y = 4x^2$$

$$y + \Delta y = 4(x + \Delta x)^2$$

$$y + \Delta y = 4(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2)$$

$$y + \Delta y = 4x^2 + 8x(\Delta x) + 4\Delta x^2$$

$$\Delta y = 4x^2 + 8x(\Delta x) + 4\Delta x^2 - y$$

$$\Delta y = 4x^2 + 8x(\Delta x) + 4\Delta x^2 - 4x^2$$

$$\Delta y = 8x(\Delta x) + 4\Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8x(\Delta x) + 4\Delta x^2}{\Delta x} = 8x + 4\Delta x$$

Proses penurunan sebuah fungsi disebut dengan diferensiasi atau merupakan sebuah proses dari pembatasan nilai dari kuosien diferensinya. Artinya ketika kita melihat perubahan pada variabel bebas yang akan mempengaruhi sebuah fungsi, dimana perubahan pada variabel bebas ini merupakan perubahan yang sangat kecil atau mendekati nol merupakan proses penurunan sebuah fungsi. Sehingga hasil dari proses diferensiasi akan menghasilkan turunan atau derivatif (derivative). Dengan demikian:

Apabila $y = f(x)$,

Maka kuosien diferensinya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Dan turunan fungsinya $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Contoh:

Jika $y = 4x^2$ maka kuosien diferensinya $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$\frac{8x(\Delta x) + 4\Delta x^2}{\Delta x} = 8x + 4\Delta x \text{ dan derivative turunan}$$

fungsinya yaitu:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (8x + 4\Delta x) = 8x + 4(0) = 8x$$

Jadi turunan atau derivative dari fungsi $y = 4x^2$ adalah

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8x.$$

Cara penulisan turunan dengan fungsi aslinya $y = f(x)$, dapat dinotasikan dengan:

- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \dots$
- $y' = \dots$
- $f'(x) = \dots$
- $y_x = \dots$
- $f_x(x) = \dots$
- $\frac{dy}{dx} = \dots$
- $\frac{d f(x)}{dx} = \dots$

Semua cara penulisan di atas memiliki arti dan maksud yang sama yang melambangkan turunan $y = f(x)$ terhadap variabel x . Dari beberapa jenis notasi turunan di atas, yang lazim digunakan adalah bentuk $\frac{dy}{dx}$.

2. Kaidah – Kaidah Differensiasi

a. Differensiasi Konstanta

Apabila $y = f(x)$, dan k merupakan konstanta, maka

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Contoh:

$$y = 12, \text{ maka } \frac{dy}{dx} = 0$$

b. Diferensiasi fungsi pangkat

Apabila $y = x^n$, dimana n merupakan konstanta
maka $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

Contoh:

$$y = x^5, \text{ maka } \frac{dy}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^4$$

c. Diferensiasi perkalian konstanta dengan fungsi

Apabila $y = kv$, dimana $v = h(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = k \frac{dv}{dx}$.

Contoh:

$$y = 3x^5, \text{ maka } \frac{dy}{dx} = 5(3x^{5-1}) = 15x^4$$

d. Diferensiasi pembagian konstanta dengan fungsi

Apabila $y = \frac{k}{v}$, dimana $v = h(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = -\frac{k \frac{dv}{dx}}{v^2}$.

Contoh:

$$y = \frac{3}{x^5}, \text{ maka nilai } \frac{dy}{dx} = -\frac{3(5x^4)}{(x^5)^2} = -\frac{15x^4}{x^{10}}$$

e. Diferensiasi penjumlahan dan pengurangan fungsi

Apabila $y = u \pm v$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$,
maka $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$.

Contoh:

$$y = 5x^3 + x^2$$

$$\text{Misalkan } u = 5x^3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 15x^2$$

$$v = x^2 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$= 15x^2 + 2x$$

f. Diferensiasi perkalian fungsi

Apabila $y = uv$ dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Contoh:

$$y = (2x^3)(x^2)$$

$$\text{Misalkan } u = 2x^3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2$$

$$v = x^2 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$= (2x^3)(2x) + (x^2)(6x^2)$$

$$= 4x^4 + 6x^4$$

g. Diferensiasi pembagian fungsi

Apabila $y = \frac{u}{v}$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Contoh:

$$y = \frac{5x^2}{x^3}$$

$$\text{Misalkan } u = 5x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$$

$$v = x^3 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \\ &= \frac{(x^3)(10x) - (5x^2)(3x^2)}{(x^3)^2} \\ &= \frac{10x^4 - 15x^4}{(x^3)^2} \\ &= \frac{-5x^4}{x^6} = \frac{-5}{x^2} = -5x^{-2} \end{aligned}$$

h. Diferensiasi Fungsi Komposit

Apabila $y = f(u)$ sedangkan $u = g(x)$, atau dengan kata lain $y = f\{g(x)\}$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Contoh:

$$y = (2x^3 + 3)^2$$

$$\text{Misalkan } u = 2x^3 + 3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2,$$

$$\text{Sehingga } y = u^2 \rightarrow \frac{dy}{du} = 2u$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= 2u(6x^2) = 2(2x^3 + 3)(6x^2) \\
 &= (4x^3 + 6)(6x^2) \\
 &= 24x^5 + 36x^2
 \end{aligned}$$

i. Diferensiasi Fungsi Berpangkat

Apabila $y = u^n$, dimana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta, maka $\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$.

Contoh:

$$y = (2x^3 + 3)^2$$

$$\text{Misalkan } u = 2x^3 + 3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2,$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= 2(2x^3 + 3)(6x^2) \\
 &= (4x^3 + 6)(6x^2) \\
 &= 24x^5 + 36x^2
 \end{aligned}$$

j. Diferensiasi Fungsi Logaritma

Apabila $y = a \log x$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$.

Contoh:

$$y = 7 \log 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \ln 7}$$

k. Diferensiasi fungsi komposit-logaritma

Apabila $y = a \log u$, dimana $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{a \log e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$.

Contoh:

$$y = \log \left(\frac{x+5}{x+7} \right)$$

$$\text{Misalkan } u = \left(\frac{x+5}{x+7} \right) \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(x+7)(1) - (x+5)(1)}{(x+7)^2} = \frac{2}{(x+7)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{a \log e}{u} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{\log e}{\frac{(x+5)}{(x+7)}} \cdot \frac{2}{(x+7)^2} \\ &= \frac{2 \log e}{(x+5)(x+7)} \end{aligned}$$

l. Diferensiasi fungsi komposit-logaritma berpangkat

Apabila $y = (a \log u)^n$, dimana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{a \log e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh:

$$y = (\log 6x^2)^3$$

$$\text{Misalkan } u = 6x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 12x$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{a \log e}{u} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 3(\log 6x^2)^3 \cdot \frac{\log e}{6x^2} \cdot (12x) \\ &= \frac{36x(\log 6x^2)^2 \log e}{6x^2} \\ &= \frac{6}{x} (\log 6x^2)^2 \log e\end{aligned}$$

m. Diferensiasi Fungsi Logaritma- Napier

$$\text{Apabila } y = \ln x, \text{ maka } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Contoh:

$$y = \ln 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$$

Kaidah ini merupakan kasus khusus dari kaidah diferensiasi fungsi logaritma, yaitu dalam hal logaritmanya berbasis e . Perlu diingat bahwa $\ln x \equiv e \log x$ dan $\ln e \equiv e \log e = 1$. Sehingga apabila $y = \ln x = e \log x$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$.

n. Diferensiasi Fungsi Komposit- Napier

$$\text{Apabila } y = \ln x, \text{ dimana } u = g(x) \text{ maka } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = \ln(5x^2 + 7)$$

$$\text{Misalkan } u = 5x^2 + 7 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{5x^2+7} \cdot 10x \\ &= \frac{10x}{5x^2+7}\end{aligned}$$

o. Diferensiasi Fungsi Komposit- Logaritma – Napier Berpangkat

Apabila $y = (\ln u)^n$, dimana $u = g(x)$, dan n merupakan konstanta, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$.

Contoh:

$$y = (\ln 3x^2)^3$$

$$\text{Misalkan } u = 3x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 6x$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 4(\ln 3x^2)^3 \left(\frac{1}{3x^2} \right) (6x) \\ &= \frac{8}{x} (\ln 3x^2)^3\end{aligned}$$

p. Diferensiasi Fungsi Eksponensial

Apabila $y = a^x$, dimana a merupakan konstanta, maka

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a.$$

Contoh:

$$y = 7^x$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

$$= 7^x \ln 7$$

Untuk $y = e^x$, maka berlaku $\frac{dy}{dx} = e^x$ karena $\ln e = 1$.

q. Diferensiasi Fungsi Komposit Eksponensial

Apabila $y = a^u$, dimana $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$.

Contoh:

$$y = 5^{(x^2-2)}$$

Misalkan $u = x^2 - 2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$

$$\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5^{(x^2-2)} (\ln 5) (2x)$$

$$= (2x) 5^{x^2-2} \ln 5$$

r. Diferensiasi Fungsi Kompleks

Apabila $y = a^u$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = v u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \cdot \ln u \frac{dv}{dx}.$$

Contoh:

$$y = 7x^{x^5}$$

Misalkan $u = 7x \rightarrow \frac{du}{dx} = 7$

$$v = x^5 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 5x^4$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= vu^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \cdot \ln u \frac{dv}{dx} \\ &= (x^5)(7x)^{x^5-1}(7) + (7x)^{x^5}(\ln 7x)(5x^4) \\ &= 49x^{x^5+4} + 35x^{x^5+4}(\ln 7x) \\ &= 35^{x^5+4} \left(\frac{7}{5} + \ln 7x \right)\end{aligned}$$

s. Diferensiasi Fungsi Balikan

Apabila $y = f(x)$ dan $x = g(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang saling berbalikan (fungsi inverse), maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Contoh:

$$x = 5y + 3y^4 \rightarrow \frac{dx}{dy} = 5 + 12x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$= \frac{1}{5+12x^3}$$

t. Diferensiasi Implisit

Apabila $f(x, y) = 0$ merupakan fungsi implisit sejati (tidak memungkinkan dijadikan bentuk fungsi eksplisit), maka $\frac{dy}{dx}$ dapat diperoleh dengan mendiferensiasikannya per suku dengan anggapan y sebagai fungsi dari x .

Contoh:

$$xy + (x + y + 1)^3 = 0$$

$$\frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(x + y + 1)^3 = 0$$

$$\left(x \frac{dy}{dx} + y\right) + 3(x + y + 1)^2 \frac{d}{dx}(x + y + 1) = 0$$

$$x \frac{dy}{dx} + y + 3(x + y + 1)^2 + 3(x + y + 1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\begin{aligned} \{x + 3(x + y + 1)^2\} \frac{dy}{dx} &= -\{y + 3(x + y + 1)^2\} \\ &= -\frac{y + 3(x + y + 1)^2}{x + 3(x + y + 1)^2} \end{aligned}$$

3. Turunan dari Turunan

Tergantung pada besar derajatnya, hakekatnya setiap fungsi dapat diturunkan lebih dari satu kali tergantung pada derajat dari variabel yang akan diturunkan fungsinya. Turunan pertama (*the first derivative*) sebuah fungsi merupakan turunan dari fungsi awal (fungsi aslinya) dengan cara menurunkan fungsi aslinya terhadap variabel bebasnya. Apabila turunan pertama diturunkan kembali maka akan di dapat turunan kedua (*the second derivataive*), dari turunan kedua ini jika diturunkan lagi maka akan di dapat turunan ketiga (*the third derivative*) dan seterusnya.

- Jika fungsi awal : $y = f(x)$
- Turunan pertama : $y' \equiv f'(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx}$

- Turunan kedua : $y'' \equiv f''(x) \equiv \frac{d^2y}{dx^2} \equiv \frac{d^2f(x)}{dx^2}$
- Turunan ketiga : $y''' \equiv f'''(x) \equiv \frac{d^3y}{dx^3} \equiv \frac{d^3f(x)}{dx^3}$
- Turunan ke-n : $y^n \equiv f^n(x) \equiv \frac{d^ny}{dx^n} \equiv \frac{d^nf(x)}{dx^n}$

Contoh:

$$y = f(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 - 17$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 8x^3 + 3x^2 - 10x$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 24x^2 + 6x - 10$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 42x + 6$$

$$y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4} = 42$$

$$y^V = \frac{d^5y}{dx^5} = 0$$

Turunan yang diperoleh dari turunan sebuah fungsi disebut turunan berderajat lebih tinggi (higher order derivatives). Turunan pertama dan turunan kedua sangat bermanfaat untuk menelaah fungsi yang bersangkutan. Besar kecilnya nilai turunan pertama dan turunan kedua dapat digunakan untuk menentukan posisi-posisi khusus dari kurva fungsi non linear.

4. Turunan Fungsi Majemuk

Turunan yang sudah dipelajari di atas merupakan turunan fungsi sederhana, artinya variabel bebas yang dianalisa hanya satu jenis sedangkan dalam beberapa kasus akan ditemui variabel bebas yang lebih dari satu jenis. Sehingga dapat dikatakan bahwa fungsi majemuk adalah fungsi yang variabel bebasnya lebih dari satu. Misalkan factor yang mempengaruhi permintaan sebuah produk (y) adalah harga barang itu sendiri (x_1), harga barang lain (x_2), pendapatan konsumen (x_3), selera konsumen (x_4) dan lain-lain. Selanjutnya adalah cara untuk menurunkan fungsi majemuk tersebut yang kita kenal dengan turunan parsial.

a. Turunan Parsial

Sebuah fungsi yang memiliki satu jenis variabel bebas hanya memiliki satu turunan. Apabila $y = f(x)$ maka turunannya hanya turunan y terhadap x saja, ataaau dapat disebut $y' = \frac{dy}{dx}$. Sedangkan jika sebuah fungsi mempunyai lebih dari satu variabel bebas maka juga akan mempunyai turunan lebih dari satu macam yang sesuai dengan jumlah jenis variabel bebasnya. Jadi jika sebuah fungsi mempunyai n jenis variabel bebas maka fungsi tersebut akan memiliki n jenis turunan. Jika $y = f(x, z)$, maka akan terdapat dua jenis turunan yaitu turunan y terhadap x atau $\frac{\partial y}{\partial x}$ dan turunan y terhadap z atau $\frac{\partial y}{\partial z}$. Hal tersebut berarti:

$$1) \quad y = f(x, z)$$

$$y' \begin{cases} f_x(x, z) = \frac{\partial y}{\partial x} \\ f_z(x, z) = \frac{\partial y}{\partial z} \end{cases}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz$$

$$2) \quad p = f(q, r, s)$$

$$p' \begin{cases} f_q(q, r, s) = \frac{\partial p}{\partial q} \\ f_r(q, r, s) = \frac{\partial p}{\partial r} \\ f_s(q, r, s) = \frac{\partial p}{\partial s} \end{cases}$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial q} dq + \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial s} ds$$

$\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ yang terdapat pada poin 1) dan $\frac{\partial p}{\partial q}$, $\frac{\partial p}{\partial r}$, $\frac{\partial p}{\partial s}$ yang terdapat pada poin 2) di atas disebut turunan parsial (derivative parsial). Sedangkan $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) dx$, $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) dz$, $\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right) dq$, $\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) dr$, $\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) ds$ disebut diferensial parsial. Serta dy dan dp disebut diferensial total.

Contoh:

Tentukan turunan parsial dari persamaan berikut:

$$y = 3x^2 - 2z^3 + 10xz - 12$$

Penyelesaian:

a) Turunan y terhadap x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (2)(3x^{2-1}) - 0 + 10x^{1-1}z - 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 6x + 10z$$

b) Turunan y terhadap z

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0 - (3)(2z^{3-1}) + 10xz^{1-1} - 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -6z^2 + 10x$$

Dalam contoh kasus di atas menurunkan y terhadap x dilambangkan dengan $\frac{\partial y}{\partial x}$ dan hanya suku-suku yang memuat variabel x saja yang diturunkan, sedangkan untuk suku-suku yang lain yang tidak memuat variabel x dianggap sebagai konstanta yang mempunyai turunan nol atau diabaikan saja. Hal tersebut juga berlaku dalam menurunkan y terhadap z yang dilambangkan dengan $\frac{\partial y}{\partial z}$. Jadi hanya suku-suku yang memuat variabel z saja yang diturunkan, sedangkan suku-suku yang tidak memuat variabel z dianggap sebagai konstanta yang mempunyai turunan nol atau diabaikan saja.

b. Turunan Dari Turunan Fungsi Parsial

Seperti pada fungsi yang memiliki satu variabel bebas, fungsi yang memiliki variabel bebas lebih dari satu juga dapat diturunkan lebih dari satu kali yang

tergantung pada derajat variabel bebasnya. Dengan kata lain masing-masing turunan dari turunan parsial masih memungkinkan untuk diturunkan lagi.

Contoh:

Tentukan nilai turunan pertama dan turunan kedua dari fungsi berikut:

$$y = 2x^4 - 3z^3 + 4xz^2 - x^2z - 5z + 8$$

Penyelesaian:

Turunan pertama: y terhadap x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (2)(4x^{4-1}) - 0 + (4)(1x^{1-1}z^2) - 2x^{2-1}z - 0 + 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 8x^3 + 4z^2 - 2xz$$

Turunan kedua : terhadap x

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (8)(3x^{3-1}) + 0 - (2)(1x^{1-1}z)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 24x^2 - 2z$$

Turunan kedua : terhadap z

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = 0 + (4)(2z^{2-1}) - (2)(1xz^{1-1})$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = 8z - 2x$$

c. Turunan pertama : y terhadap z

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial z} &= 0 - (3)(3z^{3-1}) + (4)(2xz^{2-1}) - (1)x^2z^{1-1} \\ &\quad - (5)z^{1-1} + 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -9z^2 + 8xz - x^2 - 5$$

Turunan kedua : terhadap x

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = 0 + (8)(1x^{1-1}z) - (2)(x^{2-1}) - 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = 8z - 2x$$

Turunan kedua : terhadap z

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = (-9)(2z^{2-1}) + (8)(1xz^{1-1}) - 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -18z + 8x$$

C. Latihan

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi-fungsi di bawah ini:

a. $y = -3x^4 + 5x^2 - 17$

b. $y = 10 + 2x^{-1} - x^{-3}$

c. $y = \frac{x^2+12}{x\sqrt{x}}$

d. $y = (x^2 - 2)(x - 3)$

e. $y = (3x^2 - 2x)(5 + x^{-2})$

f. $y = \frac{2x^2+5x}{x+3}$

g. $y = (3x^2 - x) \left(\frac{5x+3}{x} \right)$

h. $y = (2x + 6 - 2x^{-1})^3$

i. $y = \left(\frac{3x+5}{2x} \right)^2$

j. $y = \log \left(\frac{x+7}{x-2} \right)$

k. $y = (\log 5x^2)^3$

l. $y = \ln \left(\frac{x+7}{x-2} \right)$

m. $y = (\ln 3x^2)^3$

n. $y = 10^e e^{x^2}$

o. $y = \frac{\ln 3x}{e^x}$

p. $y = x^2 e^{x^2+5x-3}$

q. $x = 5y + 10 - y^{-2}$

r. $x = \ln(5y^2 - 4y)$

s. $xy - x^2 + y^2 = -87$

t. $2xy + x^2 - y^2 - x^2y = 0$

2. Carilah turunan kedua dan turunan ketiga dari soal berikut:

a. $y = 3x^2 + 5x$

b. $y = x^4 - 2x^2 + 7x - 2$

c. $y = -2x^3 + 6x + 10$

d. $y = x^4 - 2x^2 + 7x - 2$

e. $y = 4\sqrt{x}$

3. Carilah turunan parsial dari soal berikut:

a. $y = 3x^2 - 5z^2 + 10x^3z - 7xz^2 + 2x$

b. $y = x^{-2} + 2z^{-2} - 4xz^{-5} - 7x^{-7}$

D. Referensi

Allen, R. G. D. (1966) *Mathematical Economics*. New York: St. Martin's Press.

- Anthony, M and Norman Biggs (1996). Mathematics for Economis and Finance Methods and Modelling. London: Cambridge University Press.
- Chiang, Alpha. (2006) Dasar-dasar Matematika Ekonomi. Jakarta: Erlangga.
- Dumairy. (2010) Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, BPFE, Yogyakarta.
- Hamidah, dkk. (2020) Matematika Ekonomi 1 dan 2 untuk Analisa Ekonomi, Bisnis dan Ilmu Sosial. Surabaya : Scopindo Media Pustaka.
- Johannes, dkk. (1982) Pengantar Matematika untuk Ekonomi. Jakarta: LP3ES.
- K.I, Majid. (1972) Non-Linear Structures. London : The Butterworth Group
- Mesra, B. (2016) Penerapan Ilmu Matematika dalam Ekonomi dan Bisnis. Yogyakarta: CV Budi Utama.
- Olivier, J. (2017) Business Math: A Step by Step Handbook. Canada: Creative Commons License (CC BY-NC-SA).
- Putrodjoyo G dan Untung Rahardja. (2015) Matematika Ekonomi. Jakarta: PT. Grasindo.

PERTEMUAN XIII

APLIKASI DIFERENSIAL DALAM EKONOMI

A. Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini diharapkan mahasiswa mampu :

1. Menganalisis permasalahan ekonomi yang berkaitan dengan differensial.
2. Mengembangkan rumus differensial dalam penerapan ekonomi.

B. Materi

1. Elastisitas

Elastisitas merupakan indeks yang mewakili hubungan kuantitatif dari variabel dependen dan variabel independent. Manfaat dari elastisitas adalah untuk mengetahui tingkat kepekaan variabel dependen terhadap variabel independent. Contohnya elastisitas dapat menunjukkan tingkat sensitivitas jumlah barang atau jasa yang diminta terhadap perubahan harga sebesar satu persen. Elastisitas dari suatu fungsi $y = f(x)$ berkenaan dengan x dapat didefinisikan :

$$\eta = \frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} \right) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

Ini berarti :

- a. Elastisitas $y = f(x)$ merupakan limit dari rasio antara perubahan relatif dalam y terhadap perubahan relatif dalam x (perubahan x sangat kecil / mendekati nol)
- b. Elastisitas y terhadap x merupakan rasio antara persentase perubahan y terhadap persentase perubahan x .

Jenis-jenis elastisitas dibedakan menjadi:

- a. Elastisitas Permintaan (*Price Elastic of Demand*)

Elastisitas permintaan yaitu suatu koefisien yang menjelaskan tentang besarnya perubahan jumlah barang atau yang diminta akibat dari adanya perubahan harga.

Merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang diminta terhadap persentase perubahan harga.

Apabila fungsi permintaan dinyatakan dengan $Q_d = f(P)$, maka elastisitas harga permintaannya adalah:

$$\eta_d = \frac{\% \Delta Q_d}{\% \Delta P} = \frac{EQ_d}{EP} = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q_d/Q_d}{\Delta P/P} \right) = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q_d}$$

Nilai koefisien elastisitas harga permintaan:

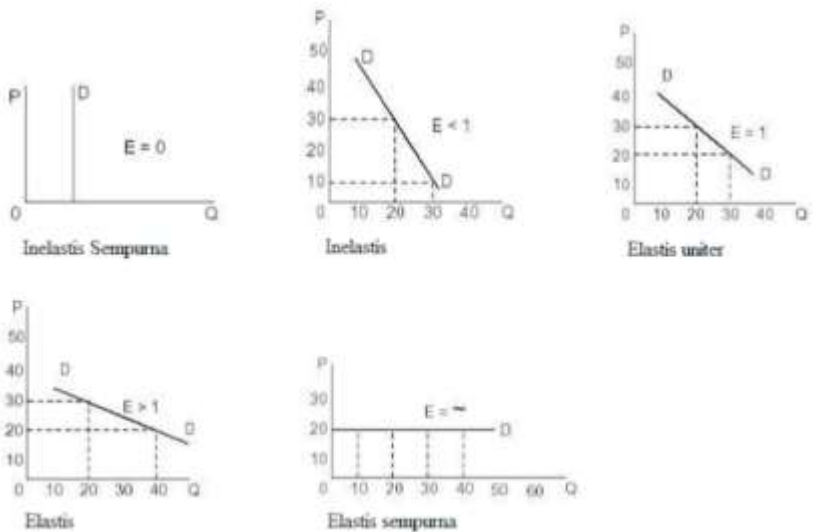
$\eta_d > 1 \rightarrow$ elastis

$\eta_d = 1 \rightarrow$ uniter

$\eta_d < 1 \rightarrow$ inelastic

$\eta_d = 0 \rightarrow$ elastis sempurna

$\eta_d > \infty \rightarrow$ inelastis sempurna



Contoh:

Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q_d = 400 - 2P^2$. Tentukan elastisitas harga permintaan pada tingkat harga $P = 10$.

Penyelesaian:

$$Q_d = 400 - 2P^2$$

Pada $P = 10$, maka

$$Q = 400 - 2(10)^2$$

$$Q = 400 - 200$$

$$Q = 200$$

Elastisitas harga permintaan pada saat $P = 10$:

$$\eta_d = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

$$\eta_d = \frac{d(400 - 2P^2)}{dP} \cdot \frac{10}{200}$$

$$\eta_d = -4P \cdot \frac{10}{200}$$

$$\eta_d = -4(10) \cdot \frac{10}{200}$$

$$\eta_d = -40 \cdot \frac{10}{200}$$

$$\eta_d = -2$$

Karena nilai $\eta_d = -2$ maka bersifat Inelastis

b. Elastisitas Penawaran

Elastisitas harga penawaran merupakan respon perubahan penawaran karena perubahan harga.

Merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang ditawarkan terhadap persentase perubahan harga.

Jika fungsi penawaran dinyatakan dengan $Q_s = f(P)$, maka elastisitas penawarannya:

$$\eta_s = \frac{\% \Delta Q_s}{\% \Delta P} = \frac{EQ_s}{EP} = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q_s / Q_s}{\Delta P / P} \right) = \frac{dQ_s}{dP} \cdot \frac{P}{Q_s}$$

Nilai koefisien elastisitas harga penawaran:

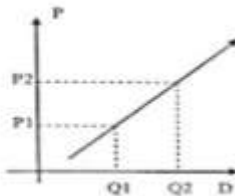
$\eta_d > 1 \rightarrow$ elastis

$\eta_d = 1 \rightarrow$ uniter

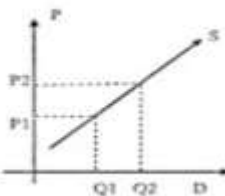
$\eta_d < 1 \rightarrow$ inelastic

$\eta_d = 0 \rightarrow$ elastis sempurna

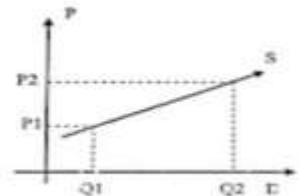
$\eta_d > \infty \rightarrow$ inelastis sempurna



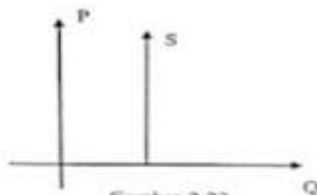
Gambar 2.19
Unitary ($E_s = 0$)



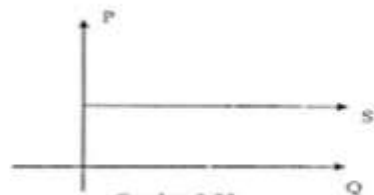
Gambar 2.20
Inelastis ($E_s < 1$)



Gambar 2.21
Elastis ($E_s > 1$)



Gambar 2.22
Inelastis Sempurna ($E_s = 0$)



Gambar 2.23
Elastis Sempurna ($E_s = \infty$, tak hingga)

Contoh:

Fungsi penawaran suatu produk adalah $Q_s = -100 +$

$2P^2$. Berapa nilai elastisitas harga penawaran apabila harga produk adalah $P = 10$.

Penyelesaian:

$$Q_s = -100 + 2P^2$$

Pada $P = 10$, maka

$$Q = -100 + 2(10)^2$$

$$Q = -100 + 200$$

$$Q = 100$$

Elastisitas harga penawaran saat $P = 10$ adalah

$$\eta_s = \frac{dQ_s}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

$$\eta_s = \frac{d(-100+2P^2)}{dP} \cdot \frac{10}{100}$$

$$\eta_s = 4P \cdot \frac{10}{100}$$

$$\eta_s = 4(10) \cdot \frac{10}{100}$$

$$\eta_s = 4$$

Karena nilai $\eta_s = 4$ maka bersifat elastis

c. Elastisitas Produksi

Koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah keluaran (output) yang dihasilkan

akibat adanya jumlah masukan (input) yang digunakan.

Merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah keluaran (output) terhadap persentase jumlah masukan (input).

Jika P melambangkan jumlah produksi yang dihasilkan, sedangkan X melambangkan jumlah factor produksi yang digunakan dan fungsi produksi dinyatakan dengan $P = f(X)$, maka elastisitas produksinya:

$$\mu_d = \frac{\% \Delta P}{\% \Delta X} = \frac{EP}{EX} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta P / P}{\Delta X / X} \right) = \frac{dP}{dX} \frac{X}{P}$$

Nilai koefisien elastisitas harga permintaan:

$$\eta_d > 1 \rightarrow \text{elastis}$$

$$\eta_d = 1 \rightarrow \text{uniter}$$

$$\eta_d < 1 \rightarrow \text{inelastic}$$

$$\eta_d = 0 \rightarrow \text{elastis sempurna}$$

$$\eta_d > \infty \rightarrow \text{inelastis sempurna}$$

Contoh:

Fungsi produksi suatu barning ditunjukkan oleh persamaan $P = 5x^2 - 2x^3$. Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan factor produksi sebanyak 3 unit dan 7 unit.

Penyelesaian:

Diketahui:

$$P = 5x^2 - 2x^3$$

$$X_1 = 3$$

$$X_2 = 3$$

Ditanya: $\eta d_1 = \dots ?$

$\eta d_2 = \dots ?$

Jawab:

$$P = 5x^2 - 2x^3 \rightarrow P' = dP/dX = 10x - 6x^2$$

$$\eta d = \frac{dP}{dX} \cdot \frac{X}{P} = (10x - 6x^2) \cdot \frac{X}{5x^2 - 2x^3}$$

$$\text{Pada } x = 3 \rightarrow \eta d = (30 - 54) \cdot \frac{3}{(45 - 54)} = 1$$

$$\text{Pada } x = 7 \rightarrow \eta d = (70 - 294) \cdot \frac{7}{(245 - 980)} = 9$$

2. Biaya Marjinal (*Marginal Cost*)

Marginal Cost atau biaya marginal merupakan biaya tambahan untuk menghasilkan satu unit tambahan output atau produk yang dikeluarkan. Marginal cost berbentuk fungsi kuadratik karena merupakan turunan pertama dari total cost (TC), sehingga $T'(C) = f(Q)$.

$$MC = C' = \frac{dC}{dQ}$$

Pada umumnya fungsi total cost non linear berbentuk fungsi kubik, karena dalam jangka Panjang

kurva TC mengalami tiga fase, yaitu : increase return to scale, constant return to scale dan decrease return to scale. Kurva marginal cost mencapai titik minimum pada saat kurva TC berada pada titik belok.

Contoh:

Diketahui fungsi total cost sebuah perusahaan $TC = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 10$. Pada produksi berapa unit marginal cost mencapai titik minimum? Hitung total cost pada saat marginal cost minimum.

Penyelesaian:

$$\text{Biaya total } C = f(Q) = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 10$$

$$\text{Biaya marginal} = MC = C' = \frac{dC}{dQ} = 3Q^2 - 6Q + 4$$

Supaya biaya marginal minimum, maka $MC' = 0$:

$$MC = 3Q^2 - 6Q + 4$$

$$MC' = 6Q - 6$$

$$6Q = 6$$

$$Q = 1$$

Biaya marginal untuk memproduksi 1 unit barang :

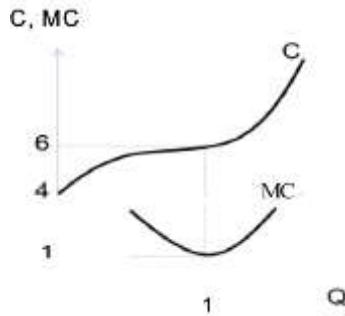
$$MC = 3(1)^2 - 6(1) + 4$$

$$MC = 1$$

Biaya Totalnya:

$$C = (1)^3 - 3(1)^2 + 4(1) + 10$$

$$C = 12$$



3. **Penerimaan Marginal (*Marginal Revenue*)**

Merupakan penerimaan tambahan yang diperoleh karena bertambahnya 1 unit keluaran yang diproduksi atau terjual. Marginal revenue (MR) umumnya berbentuk fungsi kuadratik yang merupakan turunan pertama dari fungsi total revenue (TR) atau penerimaan total, sehingga $TR = f(Q)$.

$$MR = \frac{dTR}{dQ}$$

Kurva dari marginal cost akan mencapai titik nol pada saat total revenue maksimum.

Contoh:

Andaikan fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan $P = 16 - 2Q$, maka:

Penerimaan total:

$$R = P \cdot Q = f(Q)$$

$$R = (16 - 2Q) \cdot Q$$

$$R = 16Q - 2Q^2$$

Penerimaan Marjinal:

$$MR = R' = 16 - 4Q$$

Pada $MR = 0$, maka

$$16 - 4Q = 0$$

$$4Q = 16$$

$Q = 4$, sehingga

$$P = 16 - 2Q$$

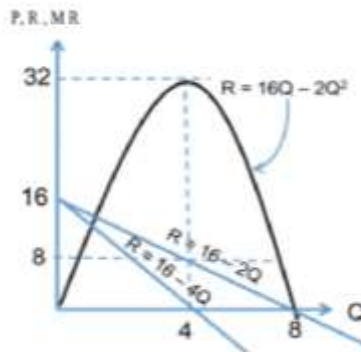
$$P = 16 - 2(4)$$

$$P = 8$$

$$R = 16Q - 2Q^2$$

$$R = 16(4) - 2(4)^2$$

$$R = 32$$



4. Permintaan Marjinal dan Elastisitas Permintaan

Apabila dua macam barang mempunyai hubungan dalam penggunaannya, maka permintaan akan barang tersebut akan mempunyai fungsi terhadap harga dari kedua macam barang. Sehingga jika barang A dan B mempunyai hubungan penggunaan, maka:

$$Q_{da} = f(P_a, P_b) \text{ dan } Q_{db} = f(P_a, P_b)$$

Turunan pertama dari Q_{da} dan Q_{db} merupakan fungsi permintaan marjinal, yaitu:

- Permintaan marjinal A berkenaan dengan $P_a \rightarrow \frac{dQ_{da}}{dP_a}$
- Permintaan marjinal A berkenaan dengan $P_b \rightarrow \frac{dQ_{da}}{dP_b}$
- Permintaan marjinal B berkenaan dengan $P_a \rightarrow \frac{dQ_{db}}{dP_a}$
- Permintaan marjinal B berkenaan dengan $P_b \rightarrow \frac{dQ_{db}}{dP_b}$

Elastisitas permintaan parsial dapat dihitung dari turunan fungsi permintaan marjinal, 2 jenis elastisitas permintaan yaitu:

- Elastisitas harga permintaan

Yaitu elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan perubahan harga barang itu sendiri.

$$\eta_{da} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{da}}$$

$$\eta_{db} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{db}}$$

- Elastisitas harga permintaan

Elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan perubahan harga barang yang lain.

$$\eta_{ab} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{da}}$$

$$\eta_{db} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{db}}$$

Untuk P_a dan P_b tertentu:

- Jika $\eta_{ab} < 0$ dan $\eta_{ba} < 0$

Hubungan antara A dan B adalah komplementer, artinya saling melengkapi (penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atau keduanya).

- 2) Jika $\eta_{ab} > 0$ dan $\eta_{ba} > 0$

Hubungan antara A dan B adalah kompetitif atau substitutif, artinya saling menggantikan (penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan akan barang tersebut dan penurunan permintaan akan barang yang lain).

Contoh:

Fungsi permintaan akan barang A dan barang B masing-masing ditunjukkan oleh $Q_{da} \cdot P_a^2 \cdot P_b^3 - 1 = 0$ dan $Q_{db} \cdot P_a^3 \cdot P_b - 1 = 0$. Tentukan elastisitas masing-masing barang dan bagaimana hubungan antara kedua barang tersebut ?

Penyelesaian:

$$Q_{da} \cdot P_a^2 \cdot P_b^3 - 1 = 0$$

$$Q_{da} = P_a^{-2} \cdot P_b^{-3}$$

$$Q_{db} \cdot P_a^3 \cdot P_b - 1 = 0$$

$$Q_{db} = P_a^{-3} \cdot P_b^{-1}$$

$$Q'_{da}/Pa = -2Pa^{-3} \cdot Pb^{-3}$$

$$Q_{db}/Pb = -Pa^{-3} \cdot Pb^{-2}$$

$$Q'_{da}/Pb = -3Pa^{-2} \cdot Pb^{-4}$$

$$Q_{db}/Pa = -3Pa^{-4} \cdot Pb^{-1}$$

$$n_{da} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial Pa} \cdot \frac{Pa}{Q_{da}} = -2Pa^{-3} \cdot Pb^{-3} \cdot \frac{Pa}{Pa^{-2} \cdot Pb^{-3}} = -2$$

$$n_{db} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial Pb} \cdot \frac{Pb}{Q_{db}} = -Pa^{-3} \cdot Pb^{-2} \cdot \frac{Pb}{Pa^{-2} \cdot Pb^{-1}} = -1$$

$$n_{ab} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial Pb} \cdot \frac{Pb}{Q_{da}} = -3Pa^{-2} \cdot Pb^{-4} \cdot \frac{Pb}{Pa^{-2} \cdot Pb^{-3}} = -3$$

$$n_{ba} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial Pa} \cdot \frac{Pa}{Q_{db}} = -3Pa^{-4} \cdot Pb^{-1} \cdot \frac{Pa}{Pa^{-3} \cdot Pb^{-1}} = -3$$

Kesimpulan:

Karena dalam menafsirkan elastisitas harga permintaan cukup dengan melihat besarnya angka hasil perhitungan tanpa menghiraukan tanda, maka:

- 3) Barang A adalah barang elastis karena $\eta_{da} > 1$
- 4) Barang B adalah barang inkuiry – elastis karena $\eta_{db} > 1$

Hubungan antara barang A dan B adalah komplementer karena $\eta_{ab} < 0$ dan $\eta_{ba} < 0$.

5. Jumlah Produksi Untuk Keuntungan Maksimal

Untuk memproduksi suatu barang, diperlukan beberapa factor produksi seperti tanah, modal, tenaga kerja, bahan baku, mesin-mesin, dll. Apabila hasil

produksi dilambangkan dengan P dan factor produksi dengan x , maka fungsi produksi dapat dituliskan dengan:

$$P = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$$

Sebagian factor produksi merupakan kebutuhan yang tetap (K), sementara sebagian merupakan factor yang variabel (L), maka fungsi produksi dapat dinyatakan dengan :

$$P = f(k, l)$$

Untuk $P =$ konstanta tertentu, fungsi produksi $P = f(k, l)$ merupakan persamaan isoquant yaitu kurva menunjukkan berbagai kombinasi penggunaan factor K dan factor L yang menghasilkan produk dalam jumlah yang sama.

Turunan pertama P merupakan produk marginal parsialnya:

$\frac{\partial P}{\partial k}$ adalah produk marginal karena factor $K \rightarrow MP_k = f(k, l)$

$\frac{\partial P}{\partial l}$ adalah produk marginal karena factor $L \rightarrow MP_l = f(k, l)$

Tingkat kombinasi penggunaan factor produksi yang optimum dapat dicari dengan metode Lagrange.

Dalam hal ini fungsi produksi $P(k, l)$ dimaksimumkan terhadap fungsi

$$M = k \cdot P_l + l \cdot P_k$$

Fungsi produksi yang hendak di optimalkan:

$$P = f(k, l)$$

Fungsi syarat yang dihadapi :

$$M = k \cdot P_k + l \cdot P_l \rightarrow k \cdot P_k + l \cdot P_l - M = 0$$

Fungsi baru Lagrange:

$$F(k, l) = f(k, l) + \lambda (k \cdot P_k + l \cdot P_l - M)$$

Syarat yang diperlukan agar $F(k, l)$ maksimum:

$$F_k(k, l) = 0 \rightarrow f_k(k, l) + \lambda P_k = 0$$

$$F_l(k, l) = 0 \rightarrow f_l(k, l) + \lambda P_l = 0$$

Dari persamaan di atas, nilai k dan l dapat diperoleh sehingga nilai p maksimum dapat dihitung.

Contoh:

Fungsi produksi suatu barang dinyatakan dengan $P = 6k^{2/3} l^{1/3}$.

- Bentuklah fungsi produk marjinal untuk masing-masing factor produksi.
- Berapakah produk marjinal tersebut jika digunakan 8 unit K dan 27 unit L !

Penyelesaian:

$$P = 6k^{\frac{2}{3}} l^{\frac{1}{3}}$$

$$MP_k = P_k = \frac{dP}{dk} = 4k^{-\frac{1}{3}} l^{\frac{1}{3}} = \frac{4\sqrt[3]{l}}{\sqrt[3]{k}}$$

$$MP_l = P_l = \frac{dP}{dl} = 2k^{\frac{2}{3}} l^{-\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt[3]{k^2}}{\sqrt[3]{l^2}}$$

Jika $k = 8$ dan $l = 21$, maka:

$$MP_k = \frac{4(27)^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{4\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4(3)}{2} = 6$$

$$MP_l = \frac{2(27)^{\frac{2}{3}}}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{2\sqrt[3]{8^2}}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{2\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{7^2}} = \frac{2(4)}{9} = \frac{8}{9}$$

C. Latihan

1. Fungsi permintaan akan barang A dan barang B masing-masing ditunjukkan oleh $Q_{da} \cdot P_a^3 \cdot P_b^2 - 3 = 0$ dan $Q_{db} \cdot P_a^2 \cdot P_b + 1 = 0$.

Tentukan elastisitas masing-masing barang dan bagaimana hubungan antara kedua barang tersebut!

2. Fungsi permintaan sebuah produk ditunjukkan oleh $Q_d = 100 - 3P^2$. Berapakah nilai elastisitasnya apabila tingkat harga produk tersebut $P = 3$? Tentukan pula jenis elastisitasnya!
3. Suatu perusahaan mempunyai fungsi penawaran produknya $Q_s = -300 + P^2$. Tentukan nilai elastisitas produk tersebut saat harga barang 15! Tentukan pula jenis elastisitasnya!
4. Fungsi produksi suatu barang dinyatakan dengan $P = 6k^2 l^3$.
 - a. Bentuklah fungsi produk marjinal untuk masing-masing factor produksi.

- b. Berapakah produk marjinal tersebut jika digunakan 10 unit K dan 20 unit L.

D. Referensi

- Dumairy. (2010) Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, BPFE, Yogyakarta.
- Hamidah, dkk. (2020) Matematika Ekonomi 1 dan 2 untuk Analisa Ekonomi, Bisnis dan Ilmu Sosial. Surabaya : Scopindo Media Pustaka.
- Johannes, dkk. (1982) Pengantar Matematika untuk Ekonomi. Jakarta: LP3ES.
- Mesra, B. (2016) Penerapan Ilmu Matematika dalam Ekonomi dan Bisnis. Yogyakarta: CV Budi Utama.
- Putrojoyo G dan Untung Rahardja. (2015) Matematika Ekonomi. Jakarta: PT. Grasindo.
- Rifa'i Rusdian. (2016) Aljabar Matriks Dasar. Yogyakarta: Deepublish.
- Rinaldi. (2020). Buku Ajar Matematika Ekonomi. Jakarta: FEB Universitas Persada Indonesia

PERTEMUAN XIV

INTEGRAL TAK TENTU

A. Capaian Pembelajaran

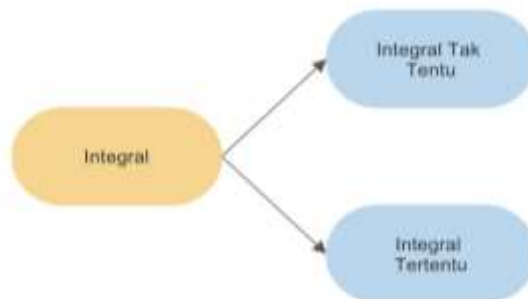
Setelah mengikuti pertemuan ini, mahasiswa diharapkan mampu untuk:

1. Memahami bentuk integral tak tentu.
2. Menganalisis konsep kaidah-kaidah integral tak tentu.
3. Menghitung integral tak tentu berdasarkan kaidah-kaidahnya.

B. Materi

1. Konsep Integral Sebagai Anti Turunan

Pada konsep integral, kita akan mengenal 2 jenis integral, yaitu integral tak tentu dan integral tertentu.



Gambar 14. 1 Konsep Integral

Yang membedakan antara integral tak tentu dan integral tertentu adalah hasil integralnya. Hasil dari integral tak tentu masih berupa sebuah fungsi, sedangkan hasil dari integral tertentu bukan berupa fungsi lagi tetapi merupakan nilai atau angka tertentu. Nilai atau angka tertentu ini diperoleh dari hasil pengurangan dengan mensubstitusikan batas atas dan batas bawah ke dalam fungsi yang sudah diintegralkan. Untuk lebih jelasnya kita akan pelajari integral tak tentu terlebih dahulu.

Integral tak tentu merupakan anti turunan atau kebalikan dari sebuah fungsi turunan. Integral merupakan suatu metode meningkatkan orde suatu fungsi atau proses mengembalikan suatu turunan fungsi ke dalam kondisi tertentu. Dalam beberapa literature disebutkan juga bahwa metode integral ini adalah sebuah metode yang mengembalikan (*invers*) sebuah fungsi turunan ke fungsi asalnya yang disebut juga anti turunan atau anti derivatif. Misalkan kita punya sebuah fungsi $f(x)$ yang kalau diturunkan maka diperoleh $f'(x)$, sebaliknya bagaimana kalau diketahui fungsi $f'(x)$ dan kita mencari fungsi $f(x)$ maka kita harus integralkan.



Integral dinotasikan dengan tanda $\int$. Jenis-jenis integral dapat dibedakan sebagai berikut:

- a. Integral tak tentu (*infinite integral*) merupakan proses penemuan fungsi asal dari hasil-hasil turunan fungsi.
- b. Integral tertentu (*finite integral*) merupakan proses pencarian luas suatu area yang batas-batasnya sudah tertentu.

2. Integral Tak Tentu (*Indefinite Integral*)

Mengintegralkan suatu fungsi turunan $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ yang berarti mencari integral atau anti turunan dari $F(x)$. Bentuk umum dari integral tak tentu adalah sebagai berikut:

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

Dimana $f(x) dx$ merupakan turunan dari $F(x)$. $F(x)$ adalah notasi fungsi asal, sedangkan $f(x)$ merupakan notasi fungsi turunan. k adalah sembarang konstanta

yang nilainya tidak tentu. Kenapa bisa muncul bilangan konstanta? Perhatikan ilustrasi di bawah ini.

$f(x)$	$\rightarrow$	$F(x)$
$F(x)$	$\leftarrow$	$f(x)$
x^2		$2x$
$x^2 + 1$		$2x$
$x^2 - 5$		$2x$
$x^2 + k$		$2x$

Tanda arah panah dari kiri ke kanan artinya diturunkan, sedangkan tanda arah panah dari kanan ke kiri artinya diintegrasikan. Pada arah panah dari kiri ke kanan (diturunkan) terdapat fungsi x^2 , $x^2 + 1$ dan $x^2 - 5$ yang apabila diturunkan maka memperoleh hasil yang sama yaitu $2x$. Sekarang kita balik arah panah dari kanan ke kiri (diintegrasikan) pada baris pertama terdapat fungsi $2x$ yang apabila diintegrasikan menghasilkan x^2 , pada baris kedua terdapat $2x$ yang apabila diintegrasikan menghasilkan $x^2 + 1$, pada baris ketiga terdapat $2x$ yang apabila diintegrasikan menghasilkan $x^2 - 5$ dan seterusnya.

Dari ilustrasi tersebut dapat kita simpulkan bahwa $x^2 + k$ maka turunannya adalah $2x$, k ini merupakan bilangan konstanta yang apabila diturunkan maka hasilnya adalah 0. Dari sini diketahui bahwa setiap fungsi yang diintegrasikan akan muncul nilai k .

Dalam integral tak tentu terdapat formula dasar yang perlu diketahui.

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + k$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + k$$

Dari formula tersebut apabila kita akan mengintegralkan fungsi $ax^n dx$, caranya koefisien dari variabel tersebut yaitu a kita bagi dengan pangkat yang ditambah dengan 1 yaitu $(n + 1)$. Selanjutnya dikalikan dengan variabel yang pangkatnya juga ditambah dengan 1 atau $(n + 1)$. Supaya lebih jelas perhatikan contoh berikut.

Contoh:

$$\begin{aligned} \text{a. } \int x^2 dx &= \frac{1}{2+1} x^{2+1} + k \\ &= \frac{1}{3} x^3 + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int 4x^5 dx &= \frac{4}{5+1} x^{5+1} + k \\ &= \frac{4}{6} x^6 + k = \frac{2}{3} x^6 + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \int (6x^2 + 4x - 6) dx &= \frac{6}{2+1} x^{2+1} + \frac{4}{1+1} x^{1+1} - 6x + k \\ &= \frac{6}{3} x^3 + \frac{4}{2} x^2 - 6x + k. \\ &= 2x^3 + 2x^2 - 6x + k \end{aligned}$$

$$\text{d. } \int y^3 dy = \frac{1}{3+1} y^3 + k$$

$$= \frac{1}{4}y^4 + k$$

3. Kaidah-Kaidah Integral Tak Tentu

a. Kaidah Fungsi Pangkat

Jika fungsi turunan adalah $f(x) = x^n$, maka integralnya adalah

$$F(x) = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, \text{ dimana } n \neq -1$$

Contoh:

- 1) Selesaikan $\int 10 dx$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int 10 dx \\ &= \frac{10 x^{0+1}}{0+1} + k \\ &= 10x + k \end{aligned}$$

- 2) Tentukan fungsi asal dari fungsi turunan berikut $f(x) = x^2$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int x^2 dx &= \frac{x^{2+1}}{2+1} + k \\ &= \frac{x^3}{3} + k \end{aligned}$$

- 3) Selesaikan $\int (x+2)^2 dx$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int (x+2)^2 dx \\ &= \frac{(x+2)^{2+1}}{2+1} + k \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}(x+2)^3 + k$$

b. Kaidah Logaritmis

Jika fungsi yang diketahui adalah fungsi logaritma, maka integralnya adalah:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k$$

Dimana $\ln x$ menunjukkan invers dari logaritma alam atau logaritma dari John Napier.

Contoh:

1) Tentukan $\int \frac{13}{x} dx$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} & \int \frac{13}{x} dx \\ &= 13 \int \frac{1}{x} dx \\ &= 13 \ln x + k \end{aligned}$$

2) Tentukan $\int \frac{3}{x+1} dx$!

Penyelesaian:

Misal $u = x + 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 1$ atau $du = dx$

$$du = dx \leftrightarrow d(x+1) = dx$$

$$x = u - 1 \text{ atau } x = (x+1) - 1, \text{ maka:}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{3}{(x+1) - 1 + 1} d(x+1) \\ &= \int \frac{3}{(x+1)} d(x+1) \\ &= 3 \ln (x+1) + k \end{aligned}$$

c. Kaidah eksponensial

Jika fungsi yang diketahui adalah fungsi eksponensial, maka integralnya adalah:

$$\int e^x dx = e^x + k$$
$$\int e^u du = e^u + k, \text{ dimana } u = f(x)$$

Contoh:

Selesaikan $\int e^{x+5} dx$!

Penyelesaian:

Misalkan $u = x + 5 \rightarrow \frac{du}{dx} = 1$ atau $du = dx$

$du = dx \leftrightarrow d(x + 5) = dx$, maka:

$$\int e^{x+5} dx$$
$$= \int e^{x+5} d(x + 5)$$
$$= e^{x+5} + k$$

d. Kaidah Penjumlahan dan Pengurangan

Jika fungsi yang diketahui penjumlahan dan pengurangan fungsi turunan $f(x) = f(x) \pm g(x)$, maka integralnya adalah:

$$F(x) = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx + k = F(x) \pm G(x) + k$$

Contoh:

- 1) Diketahui turunan fungsi $f(x) = 6x^2 + 2x + 3$
maka integral fungsi $f(x)$ adalah...

Penyelesaian:

$$F(x) = \int (6x^2 + 2x + 3)dx = \int 6x^2 dx + \int 2x dx + \int 3 dx$$

$$F(x) = \frac{6}{2+1}x^{2+1} + \frac{2}{1+1}x^{1+1} + \frac{3}{0+1}x^{0+1} + k$$

$$F(x) = \frac{6}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2 + \frac{3}{1}x^1 + k$$

$$F(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + k$$

2) Selesaikan $\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} & \int \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \int e^x dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= e^x + \ln x + k \end{aligned}$$

e. Kaidah Perkalian

Jika fungsi yang diketahui adalah $f(x)$ dan sebuah konstanta n , maka integral dari fungsi $f(x)$ adalah:

$$\int n f(x) dx = n \int f(x) dx$$

Contoh:

1) Selesaikan $\int (3x^2) dx$

Penyelesaian:

$$\int (3x^2) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \int x^2 dx \\
 &= 3 \left(\frac{x^{2+1}}{2+1} + k \right) \\
 &= x^3 + k
 \end{aligned}$$

2) Selesaikan $\int (-x^3) dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 &\int (-x^3) dx \\
 &= -1 \int x^3 dx \\
 &= -1 \left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + k \right) \\
 &= -\frac{1}{4} x^4 + k
 \end{aligned}$$

f. Kaidah Substitusi

Jika turunan fungsi adalah $f(x) = u$ dimana $u = g(x)$, maka integral fungsi $f(u)$ adalah:

$$\int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du = F(u) + k$$

Contoh:

1) Tentukan integral dari $f(x) = 2x(x^2 + 4)$

Penyelesaian:

$$\text{Misalkan } u = x^2 + 4 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$f(x) = 2x \cdot u$$

$$F(x) = \int 2x \cdot u dx = \int 2x \cdot u \cdot \frac{du}{2x}$$

$$F(u) = \int u du = \int \frac{1}{1+1} u^{1+1} + k = \frac{1}{2} u^2 + k$$

$$F(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 4)^2 + k$$

2) Selesaikan $\int \frac{x+3}{x^2+6x} dx$

Penyelesaian:

Misal $u = x^2 + 6x \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 6 = 2(x + 3)$ atau

$dx = \frac{du}{2(x+3)}$, maka

$$\begin{aligned} & \int \frac{x+3}{x^2+6x} dx \\ &= \int \frac{x+3}{x^2+6x} \frac{du}{2(x+3)} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+6x} d(x^2+6x) \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+6x) + k \end{aligned}$$

C. Latihan

Selesaikan soal berikut:

1. $\int x^4 dx$
2. $\int x^{-5} dx$
3. $\int 4x^2 dx$
4. $\int \frac{5}{x} dx$
5. $\int 4x^3 - 4x + 3 dx$
6. $\int (x^3 - \sqrt{x} - 5) dx$
7. $\int \sqrt{4+5x} dx$
8. $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

9. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$
10. $\int (x\sqrt{x} - 5)^2 dx$
11. $\int x \ln x dx$
12. $\int e^x (x + 1)^2 dx$
13. $\int \frac{x^2 + 3x - 2}{x} dx$
14. $\int (x^2 + 3x + 4)^3 (2x + 3) dx$
15. $\int \left(3x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \right)^2 dx$

D. Referensi

- Dumairy. (2010) Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, BPFE, Yogyakarta.
- Hamidah, dkk. (2020) Matematika Ekonomi 1 dan 2 untuk Analisa Ekonomi, Bisnis dan Ilmu Sosial. Surabaya : Scopindo Media Pustaka.
- Johannes, dkk. (1982) Pengantar Matematika untuk Ekonomi. Jakarta: LP3ES.
- Mesra, B. (2016) Penerapan Ilmu Matematika dalam Ekonomi dan Bisnis. Yogyakarta: CV Budi Utama.
- Putrodjoyo G dan Untung Rahardja. (2015) Matematika Ekonomi. Jakarta: PT. Grasindo.
- Rifa'i Rusdian. (2016) Aljabar Matriks Dasar. Yogyakarta: Deepublish.

Rinaldi. (2020). Buku Ajar Matematika Ekonomi. Jakarta: FEB
Universitas Persada Indonesia.

Rinaldi. (2020). Buku Ajar Matematika Ekonomi. Jakarta: FEB
Universitas Persada Indonesia

BAB XV

Penerapan Integral Tak Tentu Dalam Ekonomi

A. Capaian Pembelajaran

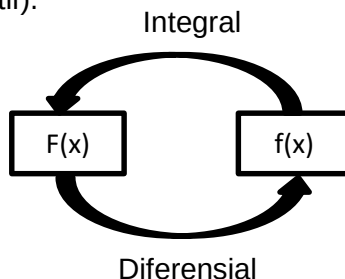
Setelah mempelajari materi ini diharapkan mahasiswa mampu :

1. Menghitung fungsi biaya total dan biaya rata-rata;
2. Menghitung fungsi penerimaan dan rata-rata penerimaan;
3. Menghitung fungsi produksi total dan rata-rata produksi total;
4. Menghitung fungsi konsumsi dan fungsi tabungan;

B. Materi

1. Pengertian

Integral merupakan kebalikan dari fungsi differensial untuk menentukan fungsi asal dari fungsi yang sudah mengalami operasi turunan / derivatif (antiderivatif).



Gambar 15. 1 Konsep Dasar Integral dan Diferensial

Pada umumnya integral dibagi menjadi dua bagian yaitu integral tak tentu (*indefinite integral*) dan integral tertentu (*definite integral*). Integral tak tentu ialah integral yang lebih dominan menghitung kembali fungsi asal dari fungsi yang sudah mengalami operasi turunan. Sementara itu, integral tertentu ialah integral yang digunakan untuk mencari luas suatu area, apalagi jika luas area tersebut berbentuk tidak beraturan oleh fungsi tertentu dengan dibatasi oleh dua garis vertikal misalnya $x = a$ dan $x = b$.

Pada bab ini yang menjadi fokus pembahasan ialah penerapan integral tak tentu. Penerapan integral tak tentu digunakan untuk mencari persamaan fungsi total variabel ekonomi ketika fungsi marginal diketahui. Maka yang menjadi focus kita pada bab ini ialah :

- a. fungsi biaya total
- b. fungsi penerimaan total
- c. fungsi produksi,
- d. fungsi utilitas
- e. fungsi konsumsi dan tabungan.

Berikut penjelasan secara detail mengenai fungsi-fungsi tersebut :

a. Fungsi Biaya Total

Fungsi biaya marginal atau *Marginal Cost* (MC) ialah turunan pertama dari fungsi biaya total atau *Total Cost* (TC), yang artinya dalam memperoleh fungsi biaya total kita perlu mengintegalkan fungsi biaya marginalnya. Dengan kata lain jika:

- 1) Biaya Total : $C = f(Q)$
- 2) Biaya Marginal : $MC = C' = dC/dQ = f'(Q)$
- 3) Biaya totalnya merupakan integral dari biaya marginal dimana :

$$TC = \int f'(Q)dQ = \int MC dQ = F(Q) + K$$

Untuk mencari fungsi biaya rata-rata menggunakan rumus biaya total dibagi dengan jumlah barang / jasa (Q) maka rumusnya ialah :

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{f(Q)}{Q}$$

Dimana :

AC = *Average Cost* / biaya rata-rata

TC = *Total Cost* / biaya total

Q = *Quantity* / jumlah barang atau jasa

Contoh :

- 1) Sebuah produk memiliki fungsi biaya marginal sebesar $MC = f(Q) = 300 + 8Q$. carilah fungsi

biaya total dan fungsi biaya rata-ratanya (AC),
jika K sebesar 2000.

Penyelesaian:

$$TC = \int MC \, dQ$$

$$TC = \int 300 + 8Q \, dQ$$

$$TC = 300Q + \frac{8}{1+1} Q^{1+1} + c$$

$$TC = 300Q + \frac{8}{2} Q^2 + c$$

$$TC = 300Q + 4Q^2 + c$$

jika $c = 2000$

$$TC = 300Q + 4Q^2 + 2000$$

Maka dapat diketahui fungsi totalnya adalah

$$TC = 300Q + 4Q^2 + 2000$$

$$TC = 300Q + 4Q^2 + 2000$$

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

$$AC = \frac{300Q + 4Q^2 + 2000}{Q}$$

$$AC = 300 + 4Q + \frac{2000}{Q}$$

Maka fungsi biaya rata-ratanya adalah $AC = 300 + 4Q + \frac{2000}{Q}$

- 2) Jika diketahui fungsi biaya marginalnya suatu perusahaan adalah $MC = 16Q - 10Q$, tentukanlah fungsi biaya total dan biaya rata-rata dimana c sebesar 6

Penyelesaian:

$$TC = \int MC \, dQ$$

$$TC = \int 16Q - 10Q \, dQ$$

$$TC = \frac{16}{1+1} Q^{1+1} - \frac{10}{1+1} Q^{1+1} + c$$

$$TC = \frac{16}{2} Q^2 - \frac{10}{2} Q^2 + c$$

$$TC = 8Q^2 - 5Q^2 + c$$

jika $c = 6$

$$TC = 8Q^2 - 5Q^2 + 6$$

Maka dapat diketahui fungsi biaya totalnya adalah $TC = 8Q^2 - 5Q^2 + 6$

$$TC = 8Q^2 - 5Q^2 + 6$$

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

$$AC = \frac{8Q^2 - 5Q^2 + 6}{Q}$$

$$AC = 8Q - 5Q + \frac{6}{Q}$$

Maka fungsi biaya rata-ratanya adalah $AC = 8Q - 5Q + \frac{6}{Q}$

b. Fungsi Penerimaan Total

Fungsi penerimaan total sejenis dengan fungsi biaya total, fungsi penerimaan marginal merupakan turunan pertama dari fungsi penerimaan totalnya. Maka dengan kata lain fungsi penerimaan total didapat dengan cara mengintegralkan fungsi penerimaan marginalnya.

- 1) Penerimaan Total : $R = f(Q)$
- 2) Penerimaan Marginal : $MR = R' = dR/dQ = f'(Q)$
- 3) Maka penerimaan total adalah integral dari penerimaan marginal

$$TR = \int MR dQ = F(Q) + K$$

Untuk nilai konstanta (K) harus bernilai 0. Ini disebabkan dalam teori ekonomi jumlah penerimaan total adalah 0 jika belum terdapat produk yang terjual.

Yang artinya $TR = 0$ jika $Q = 0$. Jadi konstanta dalam fungsi penerimaan total selalu nilainya 0.

Fungsi penerimaan rata-rata (AR) diperoleh dengan cara membagi nilai fungsi penerimaan total dengan jumlah barang / jasa yang telah terjual.

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{f(Q)}{Q}$$

Dimana :

$AR = \text{Average Revenue}$ / penerimaan rata-rata

$TR = \text{Total Revenue}$ / penerimaan total

$Q = \text{Quantity}$ / jumlah barang atau jasa

Contoh :

- 1) Jika suatu perusahaan diketahui memiliki fungsi penerimaan marginal (MR) sebesar $15 - 4Q$. Tentukanlah fungsi penerimaan totalnya (TR) dan rata-rata penerimaannya (AR) jika $c = 0$!

Penyelesaian :

$$TR = \int MR \, dQ$$

$$TR = \int 15 - 4Q \, dQ$$

$$TR = 15Q - \frac{4}{1+1} Q^{1+1} + c$$

$$TR = 15Q - \frac{4}{2}Q^2 + c$$

$$TR = 15Q - 2Q^2 + c$$

jika $c = 0$

$$TR = 15Q - 2Q^2 + 0$$

Maka dapat diketahui fungsi penerimaan totalnya adalah $TR = 15Q - 2Q^2$

$$TR = 15Q - 2Q^2$$

$$AR = \frac{TR}{Q}$$

$$AR = \frac{15Q - 2Q^2}{Q}$$

$$AR = 15 - 2Q$$

Maka fungsi penerimaan rata-ratanya adalah $AR = 15 - 2Q$

- 2) Suatu perusahaan diketahui memiliki penerimaan marginal (MR) sebesar $20Q + 9Q^2 - 2$. Tentukanlah penerimaan totalnya (TR) jika $c = 0$ dan rata-rata penerimaannya (AR) !

Penyelesaian :

$$TR = \int MR \, dQ$$

$$TR = \int 20Q + 9Q^2 - 2 \, dQ$$

$$TR = \frac{20}{1+1} Q^{1+1} + \frac{9}{2+1} Q^{2+1} - 2Q + c$$

$$TR = \frac{20}{2} Q^2 + \frac{9}{3} Q^3 - 2Q + c$$

$$TR = 10Q^2 + 3Q^3 - 2Q + c$$

jika $c = 0$

$$TR = 10Q^2 + 3Q^3 - 2Q + 0$$

Maka dapat diketahui fungsi penerimaan totalnya adalah $TR = 10Q^2 + 3Q^3 - 2Q$

$$TR = 10Q^2 + 3Q^3 - 2Q$$

$$AR = \frac{TR}{Q}$$

$$AR = \frac{10Q^2 + 3Q^3 - 2Q}{Q}$$

$$AR = 10Q + 3Q^2 - 2$$

Maka fungsi penerimaan rata-ratanya adalah

$$AR = 10 + 3Q^2 - 2$$

c. Fungsi Produksi

Fungsi produksi menggambarkan hubungan antara input dengan output selama periode waktu tertentu atau suatu gambaran bagaimana perilaku produsen dalam memproduksi barang dan jasa.

Jika diketahui fungsi produksi marginal $MP = f(x)$, maka produksi total didapatkan dengan cara mengintegralkan fungsi produksi marinalnya.

- 1) Produk Total : $P = f(Q)$ dimana, $P = \text{output} = \text{input}$
- 2) Produk Marginal : $MP = p' = dp/dx = f'(Q)$
- 3) Maka produk total adalah integral dari produk marginal

$$TP = \int MP = f'(X) dX = F(X) + K$$

Pada fungsi produksi, jika tidak ada input (factor produksi) yang digunakan, maka tidak ada output / produk yang dihasilkan, sehingga konstanta keseluruhan sama dengan nol ($K = 0$).

Contoh :

1. Tentukanlah fungsi produksi total dari sebuah industri jika fungsi produk marginalnya adalah $MP = 16X + 10$, jika $K = 0$!

Penyelesaian :

$$TP = \int MP dX$$

$$TP = \int 16X + 10 dX$$

$$TP = \frac{16}{1+1} X^{1+1} + 10X + c$$

$$TP = \frac{16}{2} X^2 + 10X + c$$

$$TP = 8X^2 + 10X + c$$

jika $c = 0$

$$TP = 8X^2 + 10X + 0$$

Maka dapat diketahui fungsi produksi totalnya adalah $TP = 8X^2 + 10X$

2. Tentukanlah fungsi produksi total dari sebuah industri farmasi yang memiliki fungsi produksi marginal sebesar $MP = 5 + 14X - 12X^2$!

Penyelesaian :

$$TP = \int MP \, dX$$

$$TP = \int 5 + 14X - 12X^2 \, dX$$

$$TP = 15X + \frac{14}{1+1}X^{1+1} - \frac{12}{2+1}X^{2+1}$$

$$TP = 15X + \frac{14}{2}X^2 - \frac{12}{3}X^3$$

$$TP = 15X + 7X^2 - 4X^3$$

Maka dapat diketahui fungsi produksi totalnya adalah $TP = 15X + 7X^2 - 4X^3$

2. Fungsi Utilitas

Fungsi utilitas adalah fungsi yang menghitung kepuasan dengan manfaat yang dirasakan seseorang dari suatu barang atau jasa. Semakin tinggi kepuasan

konsumen terhadap suatu produk, maka semakin tinggi pula nilai produk tersebut. dan begitupun sebaliknya.

Jika diketahui fungsi utilitas $U = f(Q)$, maka utilitas total didapatkan dengan cara mengintegalkan fungsi utilitas marinalnya.

- a. Utilitas Total : $U = f(Q)$
- b. Utilitas Marginal : $MU = U' = dU/dQ = f'(Q)$
- c. Maka utilitas total adalah integral dari utilitas marginal

$$U = \int MU \, dQ = \int f'(Q) \, dQ$$

Pada fungsi utilitas $K = 0$ dikarenakan seseorang tidak akan merasa puas (utilitas) jika ia tidak mengkonsumsi barang atau jasa.

Contoh :

- a. Jika diketahui kepuasan konsumen dalam mengkonsumsi sebuah produk yaitu utilitas marginal (MU) sebesar $15 - 8Q$, tentukanlah fungsi utilitas total nya !

Penyelesaian :

$$U = \int MU \, dQ$$

$$U = \int 15 - 8Q \, dQ$$

$$U = 15Q - \frac{8}{1+1} Q^{1+1}$$

$$U = 15Q - \frac{8}{2}Q^2$$

$$U = 15Q - 4Q^2$$

Konstanta pada fungsi utilitas juga sama dengan 0 ($K=0$), dikarenakan tidak adanya kepuasan (utility) seorang konsumen peroleh jika ia tidak mengkonsumsi suatu barang / jasa.

3. Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan

Dalam teori ekonomi, fungsi konsumsi (C) dan tabungan (S) dinyatakan sebagai fungsi pendapatan nasional (Y). Dalam hal ini, konsumsi (C) adalah integral dari MPC dan tabungan (S) adalah integral dari MPS.

MPC (*Marginal Propensity to Consume*) ialah membandingkan besarnya perubahan konsumsi (ΔC) dengan besarnya perubahan pendapatan nasional (ΔY) yang membuat konsumsi berubah.

MPS (*Marginal Propensity to Saving*) ialah membandingkan besarnya perubahan tabungan (ΔS) dengan besarnya perubahan pendapatan nasional (ΔY) yang membuat konsumsi berubah.

$$C = \int MPC \, dY = F(Y) + K$$

Dimana konstanta K adalah konsumsi minimum ketika pendapatan = 0

$$S = \int MPS dY = F(Y) + K$$

Dengan menggunakan konstanta (K), pada saat pendapatan = 0, menyebabkan nilai tabungan menurun (*dissaving*) sehingga menyebabkan nilai K negatif.

Keterangan :

$MPC < 1$, artinya sebagian besar tambahan pendapatan digunakan untuk menambah besarnya konsumsi, dan sisanya yang berjumlah kecil sebagai tambahan tabungan.

$MPC > \frac{1}{2}$, artinya lebih dari 50 % pendapatan dihabiskan untuk konsumsi.

MPC positif, artinya konsumsi meningkat seiring dengan peningkatan pendapatan.

Contoh :

- a. Jika keinginan konsumsi marginal seseorang diketahui sebesar 0,7 dan jumlah konsumsi minimumnya adalah Rp.20.000 pada saat pendapatannya tidak ada atau sama dengan nol (0). Tentukanlah fungsi konsumsinya !

Penyelesaian :

$$C = \int MPC dY$$

$$C = \int 0,7 dY$$

$$C = \int 0,7Y + K$$

Selanjutnya, yang harus dicari adalah nilai c atau K (konstanta integrasi) dengan mengganti $y = 0$ dan C (konsumsi) = 20.000 kedalam persamaan tersebut :

$$C = \int 0,7Y + K$$

$$20.000 = \int 0,7(0) + K$$

$$20.000 = 0 + K$$

$$-c = -20.000$$

$$c = 20.000$$

Maka dapat diketahui fungsi konsumsinya adalah $C = \int 0,7Y + 20.000$

C. Latihan

1. Jika suatu perusahaan memiliki fungsi biaya marginal seperti dibawah ini dan memiliki biaya tetap (K) sebesar 15, tentukanlah fungsi biaya totalnya !
 - a. $MC = Q^2 + 8Q$
 - b. $MC = 3Q^2 + 6Q$
 - c. $MC = 5 + Q - Q^2$
2. Tentukanlah fungsi penerimaan total, jika diketahui fungsi penerimaan marginal sebagai berikut :

- a. $MR = 5Q^2$
 - b. $MR = 4Q - 10$
 - c. $MR = 6Q^2 - 8Q + 3$
3. Setelah mengkonsumsi sebuah produk, didapat marginal utility seorang konsumen ialah $MU = 12Q - 36Q^2$. Tentukanlah fungsi utilitas totalnya !
 4. Tentukanlah fungsi konsumsi dan fungsi tabungan, misal diketahui fungsi konsumsi $C = \int MPC \, dy = 2 \, dy + K$ dan pendapatan = 0 serta konsumsi autonomisnya (K) adalah 40 !
 5. Suatu perusahaan memperoleh persamaan penerimaan marginal sebesar $MR = 150 - 0,3Q + 2Q^2$, Tentukanlah :
 - a. Fungsi penerimaan total
 - b. Fungsi penerimaan rata-rata

D. Referensi

- Dumairy. 2010. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta : BPFE.
- Kalangi, Josep Bintang. 2014. *Matematika Ekonomi dan Bisnis Edisi ke-3*. Jakarta : Salemba Empat.
- Wirawan, Nata. 2017. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Denpasar : Keraras Emas.
- (Juwairiah et al., 2012).

BAB XVI

INTEGRAL TERTENTU

A. Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini diharapkan mahasiswa mampu :

1. Mengetahui Pengertian Integral Tertentu
2. Menyelesaikan persoalan integral tertentu dengan menggunakan kaidah-kaidah integral tertentu.

B. Materi

1. Pengertian Integral Tertentu

Integral adalah kebalikan dari proses diferensiasi. Integral ditemukan saat ditemukannya masalah dalam diferensiasi dimana matematikawan harus berpikir bagaimana menyelesaikan masalah yang berkebalikan dengan solusi diferensiasi. Integral dan turunan merupakan sebuah konsep penting dalam matematika dan menjadi operasi utama pada kalkulus. Lambang integral adalah $\int$.

Integral tertentu merupakan sebuah konsep yang berhubungan dengan proses pencarian luas suatu area yang batas-batas atau limit dari area tersebut sudah tertentu. Dengan kata lain integral tertentu adalah integral

Matematika Ekonomi dan Bisnis 357

yang telah ditentukan nilai pertama dan nilai akhirnya, terdapat rentang $a - b$ yang menjadi batas atas dan batas bawah. Berikut bentuk rumus integral tertentu :

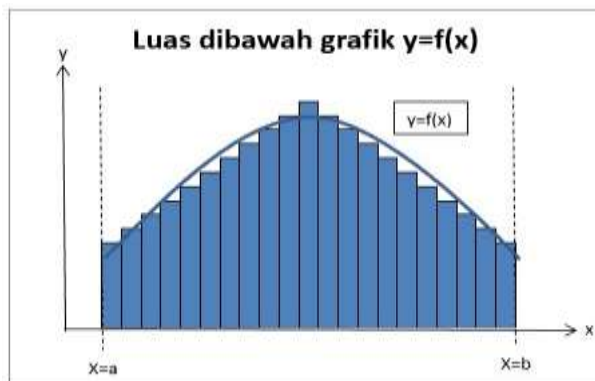
$$\begin{aligned}\int_{x=a}^{x=b} f'(x)dx &= \int_a^b f'(x)dx \\ &= f(x)\Big|_a^b \\ &= f(b) - f(a)\end{aligned}$$

dengan:

$x = a$ disebut batas bawah

$x = b$ disebut batas atas

Arti dari bentuk integral di atas adalah suatu $f'(x)$ diintegrasikan atau dijumlahkan secara kontinu mulai dari titik a sampai titik b , sehingga hasil akhir yang diperoleh akan berupa angka, tidak lagi fungsi. Berikut grafik dari integral tertentu :



Gambar 16. 1 Grafik Integral

Dari gambar grafik tersebut terlihat batas bawah (a) dan batas atasnya (b), hal ini merupakan dasar dalam mencari luas bidang tak tentu. Luas suatu bidang dibawah grafik $y = f(x)$ yang dibatasi oleh $x=a$, $x=b$ dapat dihitung menggunakan integral pada interval $a \leq x \leq b$ atau ditulis: $Luas : \int_a^b f(x) dx$.

Dalam kehidupan sehari-hari, aplikasi penting Integral dapat diterapkan pada banyak hal. Dari hal yang sederhana hingga yang sangat kompleks. Ada banyak penerapan integral dalam kehidupan sehari-hari, seperti mencari luas benda, mencari volume benda yang berputar, mencari panjang busur, dan lain-lain. Integral tidak hanya digunakan dalam matematika. Integral digunakan di banyak bidang lain seperti ekonomi, fisika, biologi, teknik, dan banyak bidang lain yang menggunakannya.

2. Sifat Integral Tertentu

Berikut adalah sifat-sifat integral tertentu:

a. $\int_a^b f(x)dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a), \text{ jika } a < c < b$

Contoh :

$$\begin{aligned} \int_1^3 9 dx &= 9x \Big|_1^3 \\ &= 9(3) - 9(1) \\ &= 27 - 9 \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\text{b. } \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Contoh :

$$\begin{aligned} \int_2^4 8x^3 dx &= - \int_2^4 8x^3 dx \\ &= - \frac{8}{3+1} x^{3+1} \Big|_2^4 \\ &= - \frac{8}{4} x^4 \Big|_2^4 \\ &= - \frac{8}{4} (4)^4 - \frac{8}{4} (2)^4 \\ &= -2(4)^4 - 2(2)^4 \\ &= -2(256) - 2(16) \\ &= -512 - 32 \\ &= -544 \end{aligned}$$

$$\text{c. } \int_a^a f(x)dx = 0$$

Contoh :

$$\begin{aligned} \int_2^2 5x^3 dx &= 5x^3 \Big|_2^2 \\ &= \frac{5}{3+1} x^{3+1} \Big|_2^2 \\ &= \frac{5}{4} x^4 \Big|_2^2 \\ &= \frac{5}{4} (2)^4 - \frac{5}{4} (2)^4 \\ &= \frac{5}{4} (16) - \frac{5}{4} (16) \\ &= \frac{5}{4} (16) - \frac{5}{4} (16) \\ &= 20 - 20 \end{aligned}$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned}
 6 \int_0^2 x^3 dx &= 6x^3 \Big|_0^2 \\
 &= \frac{6}{3+1} x^{3+1} \Big|_0^2 \\
 &= \frac{6}{4} x^4 \Big|_0^2 \\
 &= \frac{6}{4} (2)^4 - \frac{6}{4} (0)^4 \\
 &= \frac{6}{4} (16) - \frac{6}{4} (0) \\
 &= 24
 \end{aligned}$$

d. $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$, jika bilangan riil

Contoh :

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 6x^3 dx &= 6x^3 \Big|_0^2 \\
 &= \frac{6}{3+1} x^{3+1} \Big|_0^2 \\
 &= \frac{6}{4} x^4 \Big|_0^2 \\
 &= \frac{6}{4} (2)^4 - \frac{6}{4} (0)^4 \\
 &= \frac{6}{4} (16) - \frac{6}{4} (0) \\
 &= 24
 \end{aligned}$$

$$e. \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Contoh :

$$\begin{aligned} \int_1^3 2x^2 + 5x \, dx &= \int_1^3 2x^2 + \int_1^3 5x \, dx \\ &= 2x^2 \Big|_1^3 + 5x \Big|_1^3 \\ &= [2(3)^2 - 2(1)] + [5(3) - 5(1)] \\ &= [18 - 2] + [15 - 5] \\ &= 16 + 10 \\ &= 26 \end{aligned}$$

$$f. \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Contoh :

$$\begin{aligned} \int_1^3 2x^2 + 5x \, dx &= \int_1^3 2x^2 - \int_1^3 5x \, dx \\ &= 2x^2 \Big|_1^3 - 5x \Big|_1^3 \\ &= [2(3)^2 - 2(1)] - [5(3) - 5(1)] \\ &= [18 - 2] - [15 - 5] \\ &= 16 - 10 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Contoh soal dan Penyelesaiannya :

a. Diketahui $\int_1^2 10 \, dx$, hitunglah hasilnya !

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
 & \int_1^2 10 \, dx \\
 &= 10x \Big|_1^2 \\
 &= 10(2) - 10(1) \\
 &= 20 - 10 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

b. Diketahui $\int_{-1}^2 6x^2 \, dx$, hitunglah hasilnya !

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^2 6x^2 \, dx \\
 &= 6x^2 \Big|_{-1}^2 \\
 &= \frac{6}{2+1} x^{2+1} \Big|_{-1}^2 \\
 &= \frac{6}{3} x^3 \Big|_{-1}^2 \\
 &= 2(2)^3 - 2(-1)^3 \\
 &= 2(8) - 2(-1) \\
 &= 16 + 2 \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

c. Diketahui $\int_1^3 (3x^2 + 5) \, dx$, hitunglah hasilnya !

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 (3x^2 + 5) \, dx \\
 &= \frac{3}{2+1} x^{2+1} + 5x \Big|_1^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{3}x^3 + 5x \Big|_1^2 \\
&= \left[\frac{3}{3}(2)^3 + 5(2) \right] - \left[\frac{3}{3}(1)^3 + 5(1) \right] \\
&= [8 + 10] - [1 + 5] \\
&= 18 - 6 \\
&= 12
\end{aligned}$$

d. Diketahui $\int_0^2 (3x^2 - 15x - 10)dx$, hitunglah hasilnya !

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 (3x^2 - 15x - 10)dx \\
&= \frac{3}{2+1}x^{2+1} - \frac{15}{1+1}x^{1+1} - 10x \Big|_0^2 \\
&= \frac{3}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 10x \Big|_0^2 \\
&= x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 10x \Big|_0^2 \\
&= \left[(2)^3 - \frac{15}{2}(2) - 10(2) \right] - \left[(0)^3 - \frac{15}{2}(0) + 10(0) \right] \\
&= [8 - 15 - 20] - [0 - 0 - 0] \\
&= -27
\end{aligned}$$

e. Diketahui $\int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 4x + 2)dx$, hitunglah hasilnya !

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
& \int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 4x + 2) dx \\
&= x^3 - 6x^2 + 4x + 2x \Big|_2^3 \\
&= \frac{1}{3+1} x^{3+1} - \frac{6}{2+1} x^{2+1} + \frac{4}{1+1} x^{1+1} + 2x \Big|_2^3 \\
&= \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{6}{3} x^3 + \frac{4}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_2^3 \\
&= \left(\frac{1}{4} (3)^4 - \frac{6}{3} (3)^3 + \frac{4}{2} (3)^2 + 2(3) \right) - \left(\frac{1}{4} (2)^4 - \frac{6}{3} (2)^3 + \frac{4}{2} (2)^2 + 2(2) \right) \\
&= \left(\frac{1}{4} (81) - 2(27) + 2(9) + 6 \right) - \left(\frac{1}{4} (16) - 2(8) + 2(4) + 4 \right) \\
&= (20,25 - 54 + 18 + 6) - (4 - 16 + 8 + 4) \\
&= (-9,75) - (0) \\
&= -9,75
\end{aligned}$$

f. Diketahui $\int_0^3 (4x + 2)(2x - 7) dx$, hitunglah hasilnya !

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
& \int_0^3 (4x + 2)(2x - 7) dx \\
&= 8x^2 - 28x + 4x - 14 \Big|_0^3 \\
&= 8x^2 - 24x - 14 \Big|_0^3 \\
&= \int_0^3 \frac{8}{2+1} x^{2+1} - \frac{24}{1+1} x^{1+1} - 14x \\
&= \int_0^3 \frac{8}{3} x^3 - \frac{24}{2} x^2 - 14x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^3 \frac{8}{3}x^3 - \frac{24}{2}x^2 - 14x \\
&= 2,6x^3 - 12x^2 - 14x \Big|_0^3 \\
&= [2,6(3)^3 - 12(3)^2 - 14(3)] - [2,6(0)^3 - 12(0)^2 - 14(0)] \\
&= 2,6(27) - 12(9) - 14(3) \\
&= 70,2 - 108 - 42 \\
&= 70,2 - 108 - 42 \\
&= 79,8
\end{aligned}$$

g. Diketahui $\int_1^b 2x \, dx = 8$, tentukanlah nilai b dari bentuk integral tersebut !

Penyelesaian :

$$\int_1^b 2x \, dx = 8$$

$$\int_1^b 2x \, dx = x^2 \Big|_1^b$$

$$\int_1^b 2x \, dx = b^2 - 1^2 = 8$$

$$\text{maka } b = 3^2 \text{ atau } b = \sqrt{9} = 3$$

C. Latihan

Hitunglah integral tertentu berikut ini dengan cara terstruktur :

$$1. \int_0^1 9 \, dx$$

$$2. \int_2^4 5x \, dx$$

3. $\int_{-1}^3 4x^2 dx$
4. $\int_1^3 (2x + 3x) dx$
5. $\int_2^6 (3x + 1)(x - 5) dx$

D. Referensi

- Dumairy. 2010. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta : BPFE.
- Kalangi, Josep Bintang. 2014. *Matematika Ekonomi dan Bisnis Edisi ke-3*. Jakarta : Salemba Empat.
- Wirawan, Nata. 2017. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Denpasar : Keraras Emas.
- (Juwairiah et al., 2012).

BAB XVII

PENERAPAN INTEGRAL TERTENTU

A. Capaian Pembelajaran

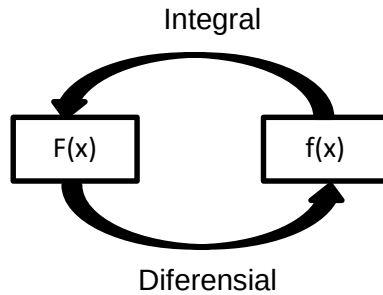
Setelah mempelajari materi ini diharapkan mahasiswa mampu :

1. Mengetahui Pengertian surplus konsumen;
2. Menghitung surplus konsumen dilihat dari fungsi permintaan;
3. Mengetahui Pengertian surplus produsen;
4. Menghitung surplus konsumen dilihat dari fungsi penawaran;

B. Materi

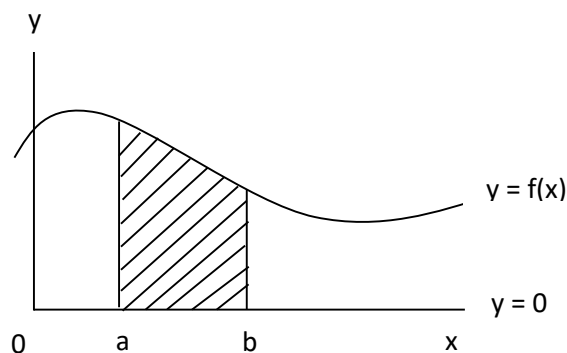
1. Pendahuluan

Integral merupakan kebalikan dari fungsi differensial untuk menentukan fungsi asal dari fungsi yang sudah mengalami operasi turunan / derivatif (antiderivatif).

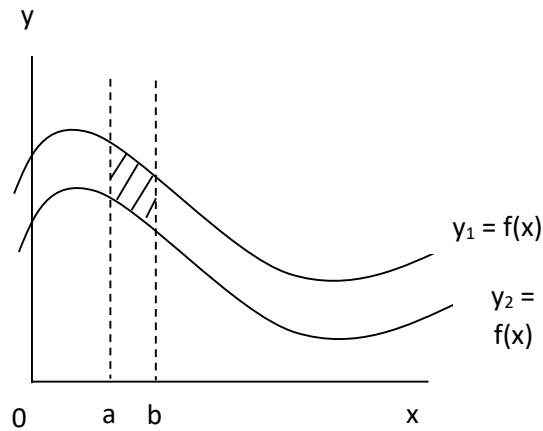


Gambar 17. 1 Konsep Dasar Integral dan Diferensial

Pada umumnya integral dibagi menjadi dua bagian yaitu integral tak tentu (*indefinite integral*) dan integral tertentu (*definite integral*). Integral tak tentu ialah integral yang lebih dominan menghitung kembali fungsi asal dari fungsi yang sudah mengalami operasi turunan. Sementara itu, integral tertentu ialah integral yang digunakan untuk mencari luas suatu area, apalagi jika luas area tersebut berbentuk tidak beraturan oleh fungsi tertentu dengan dibatasi oleh dua garis vertikal misalnya $x = a$ dan $x = b$.



Gambar 17. 2 Grafik Integral Tertentu 1



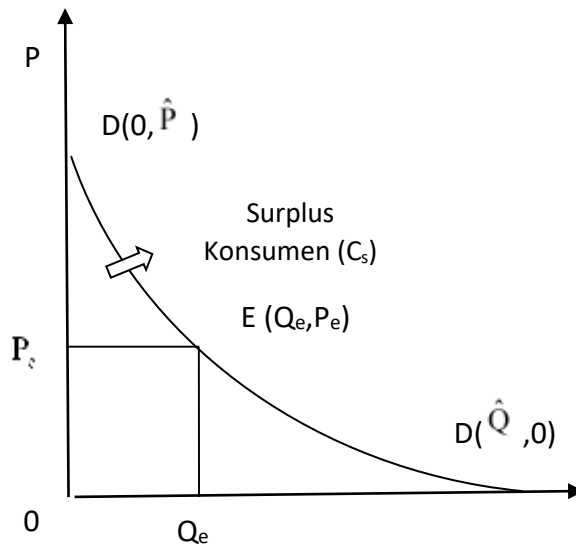
Gambar 17. 3 Grafik Integral Tertentu 2

Penerapan dalam ekonomi, integral tertentu bisa digunakan untuk mencari besarnya Keuntungan Konsumen (Surplus Konsumen) dan Keuntungan Produsen (Surplus Produsen).

a. Surplus Konsumen

Surplus konsumen adalah suatu keuntungan lebih yang dinikmati oleh konsumen tertentu berdasarkan tingkat harga pasar suatu barang tertentu. Dengan kata lain surplus konsumen merupakan selisih dari jumlah maksimum yang rela dibayarkan oleh seseorang atas suatu produk dengan jumlah yang sebenarnya dibayar oleh konsumen ketika membeli suatu produk di pasar. Surplus konsumen dapat diukur dengan cara melihat titik potong antara kurva permintaan dengan sumbu harga

dari produk tersebut. Berikut ilustrasi surplus konsumen :



Gambar 17. 4 Surplus Konsumen

Dari kurva tersebut diatas terlihat Fungsi permintaan $P = f(Q)$ menunjukkan jumlah suatu barang yang akan dibeli oleh konsumen pada tingkat harga tertentu. Misal tingkat harga pasar adalah P_e , maka bagi konsumen A dia akan membayar dengan harga yang sesuai yaitu P_e tapi bagi konsumen B yang lainnya ada yang sanggup dan bersedia membayar dengan harga lebih tinggi dari P_e , hal ini termasuk keuntungan bagi konsumen tersebut, karena dia hanya perlu membayar barang yang dibeli dengan P_e . Keuntungan lebih semacam inilah yang dikatakan sebagai surplus konsumen. Secara geometri,

besarnya surplus konsumen ditunjukkan oleh luas area di bawah kurva permintaan tetapi di atas tingkat harga pasar.

Besarnya surplus konsumen adalah :

$$C_s = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_e \cdot P_e$$

Dalam hal fungsi permintaan berbentuk $P = f(Q)$ atau

$$C_s = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P) dP$$

Dalam hal fungsi permintaan berbentuk $Q = f(P)$; $\hat{P}$ adalah nilai P untuk $Q = 0$ atau penggal kurva permintaan pada sumbu harga. Maka dari itu bentuk formulanya ialah :

$$C_s = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_e \cdot P_e = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P) dP$$

Contoh Soal:

- 1) Jika diketahui fungsi permintaan $Q = 60 - 2P$ yang tingkat harga pasarnya 10 maka hitunglah surplus konsumennya !

Penyelesaiannya:

Diketahui :

$Q = 60 - 2P$ ubah bentuk fungsinya menjadi fungsi P maka :

$$Q = 60 - 2P$$

$$2P = 60 - Q$$

$$P = \frac{60}{2} - \frac{Q}{2}$$

$$P = 30 - 0,5Q$$

Mencari titik potong dari fungsi $Q = 60 - 2P$:

Jika $P = 0$

$$Q = 60 - 2P$$

$$Q = 60 - 2(0)$$

$$Q = 60$$

Jika $Q = 0$

$$Q = 60 - 2P$$

$$0 = 60 - 2P$$

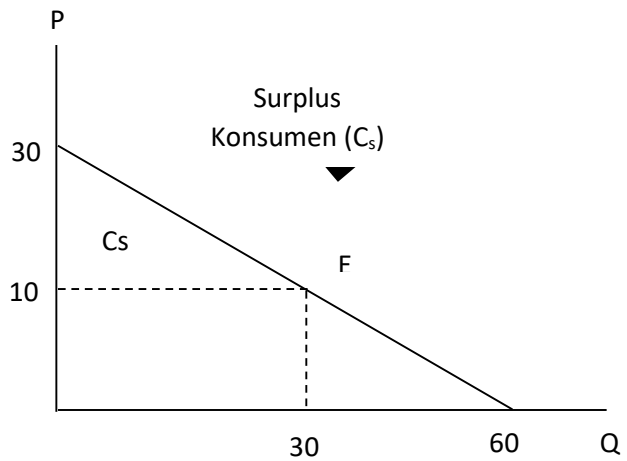
$$2P = 60$$

$$P = 60 / 2$$

$$P = 30$$

Jika $P = 10$

$$Q = 60 - 2P$$



$$Q = 60 - 2(10)$$

$$Q = 60 - 20$$

$$Q = 40 \text{ (Qe)}$$

Menghitung Surplus Konsumen :

Cara I

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{Qe} f(Q) dQ - Qe \cdot Pe \\ &= \int_0^{40} (30 - 0,5Q) dQ - (40)(10) \\ &= [30Q - 0,25 Q^2]_0^{40} - 400 \\ &= (30(40) - 0,25(40)^2) - (30 \cdot 0 - 0,25(0)^2) - 400 \\ &= 1200 - 400 - 400 \\ &= 400 \end{aligned}$$

Cara II

$$\begin{aligned} CS &= \int_{Pe}^P f(P) dp \\ &= \int_{10}^{30} (60 - 2P) dp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[60P - \frac{2}{1+1} P^{1+1} \right]_{10}^{30} \\
&= [60P - P^2]_{10}^{30} \\
&= \{60(30) - (30)^2\} - \{60(10) - (10)^2\} \\
&= (1800 - 900) - (600 - 100) \\
&= 900 - 500 \\
&= 400
\end{aligned}$$

- 2) Jika diketahui fungsi permintaan $Q = 100 - 4P$ yang tingkat harga pasarnya 20 maka hitunglah surplus konsumennya serta susunlah ilustrasinya dalam diagram !

Penyelesaiannya:

Diketahui :

$Q = 100 - 4P$ ubah bentuk fungsinya menjadi fungsi P maka :

$$Q = 100 - 4P$$

$$4P = 100 - Q$$

$$P = \frac{100}{4} - \frac{Q}{4}$$

$$P = 25 - 0,25Q$$

Mencari titik potong dari fungsi $Q = 100 - 4P$:

Jika $P = 0$

$$Q = 100 - 4P$$

$$Q = 100 - 4(0)$$

$$Q = 100$$

$$\text{Jika } Q = 0$$

$$Q = 100 - 4P$$

$$0 = 100 - 4P$$

$$4P = 100$$

$$P = 100 / 4$$

$$P = 25$$

$$\text{Jika } P = 20$$

$$Q = 100 - 4P$$

$$Q = 100 - 4(20)$$

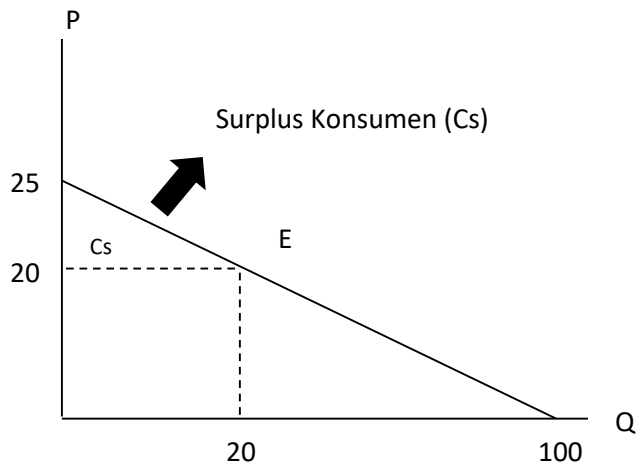
$$Q = 100 - 80$$

$$Q = 20 \text{ (} Q_e \text{)}$$

Menghitung Surplus Konsumen

Cara I

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{Q_e} f(Q) dQ - Q_e \cdot P_e \\ &= \int_0^{20} (25 - 0,25Q) dQ - (20)(20) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left[25Q - \frac{0,25}{1+1} Q^{1+1} \right]_0^{20} - (20)(20) \\
&= \left[25Q - 0,125 Q^2 \right]_0^{20} - 400 \\
&= (25(20) - 0,125(20)^2) - (25(0) - 0,125(0)^2) - 400 \\
&= 500 - 50 - 400 \\
&= 50
\end{aligned}$$

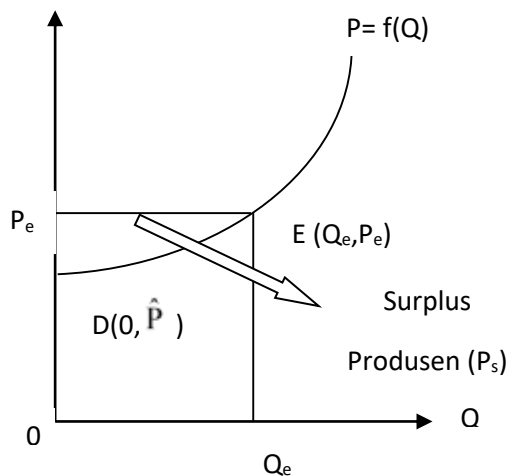
Cara II

$$\begin{aligned}
Cs &= \int_{Pe}^P f(P) dp \\
&= \int_{20}^{25} (100 - 4P) dp \\
&= \left[100P - \frac{4}{1+1} P^{1+1} \right]_{20}^{25} \\
&= \left[100P - 2P^2 \right]_{20}^{25} \\
&= \{ 100(25) - 2(25)^2 \} - \{ 100(20) - 2(20)^2 \} \\
&= (2500 - 1250) - (2000 - 800) \\
&= 1250 - 1200 \\
&= 50
\end{aligned}$$

b. Surplus Produsen

Surplus Produsen adalah suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati produsen tertentu diatas tingkat harga pasar dari barang yang ditawarkannya. Surplus produsen juga merupakan tambahan pemasukan yang diperoleh produsen dari suatu barang yang ditawarkan pada harga tinggi jika dibandingkan dengan harga aslinya. Dengan kata lain, surplus produsen merupakan kondisi ketika harga yang diberikan kepada produsen dikurangi dengan biaya yang telah dikeluarkannya.

Surplus konsumen dapat diukur dengan cara melihat titik potong antara kurva penawaran dengan sumbu harga dari produk tersebut. Berikut ilustrasi surplus produsen :



Gambar 17. 5 Surplus Produsen

Berdasarkan kurva tersebut diatas fungsi penawaran $P = f(Q)$ menggambarkan jumlah suatu barang yang ingin dijual oleh produsen pada tingkat harga tertentu. Misalnya tingkat harga pasar adalah P_e , maka bagi produsen tertentu yang sesungguhnya bersedia menjual dengan harga lebih rendah dari P_e hal ini akan menjadi keuntungan bagi seorang produsen, karena produsen bisa menjual barangnya dengan harga P_e (lebih tinggi dari harga jual awal yang direncanakan). Keuntungan lebih seperti inilah yang disebut dengan surplus produsen. Secara geometri, besarnya surplus produsen digambarkan pada luas area di atas kurva penawaran tetapi di bawah tingkat harga pasar.

Besarnya surplus produsen adalah :

$$P_s = Q_e \cdot P_e - \int_0^{Q_e} f(Q) dQ$$

Dalam hal fungsi penawaran berbentuk $P = f(Q)$

$$P_s = \int_p^{P_e} f(P) dP$$

Dalam hal fungsi penawaran berbentuk $Q = f(P)$; $\hat{P}$ adalah nilai P untuk $Q = 0$ atau penggal kurva penawaran pada sumbu harga. Dengan demikian rumus surplus produsen ialah sebagai berikut :

$$P_s = Q_e \cdot P_e - \int_0^{Q_e} f(Q) dQ = \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P) dP$$

Contoh Soal:

- 1) Seorang produsen mempunyai fungsi penawaran $P = 0,5Q + 4$. Berapa surplus produsen jika tingkat harga keseimbangan di pasar adalah 12 serta susunlah ilustrasinya dalam diagram !

Penyelesaiannya:

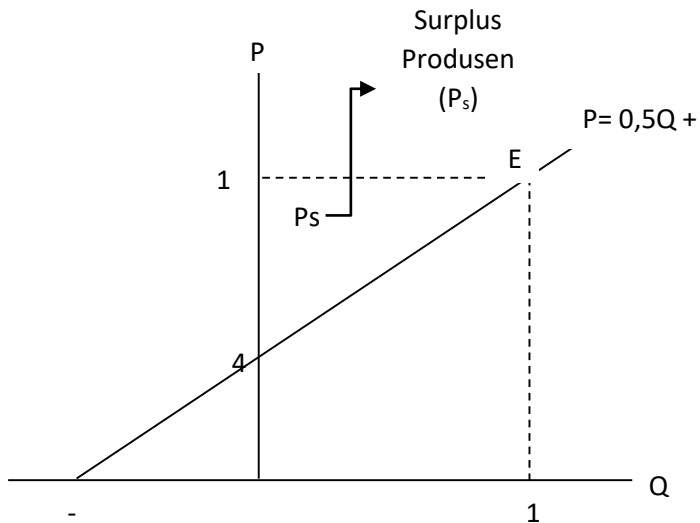
$P = 0,5Q + 4$ ubah bentuk fungsinya menjadi fungsi Q
maka :

$$P = 0,5Q + 4$$

$$-0,5Q = 4 - P$$

$$Q = \frac{4}{-0,5} + \frac{-P}{-0,5}$$

$$Q = -8 + 2P$$



Mencari titik potong dari fungsi $P = 0,5Q + 4$

jika $Q = 0$

$$P = 0,5Q + 4$$

$$P = 0,5(0) + 4$$

$$P = 0 + 4$$

$$P = 4$$

$$\text{jika } P = 0$$

$$P = 0,5Q + 4$$

$$1. \quad = 0,5Q + 4$$

$$-0,5Q = 4$$

$$Q = 4/-0,5$$

$$Q = -8$$

$$\text{jika } P = 12$$

$$P = 0,5Q + 4$$

$$12 = 0,5Q + 4$$

$$-0,5Q = 4 - 12$$

$$-0,5Q = -8$$

$$Q = -8/-0,5$$

$$Q = 16 \text{ (Qe)}$$

Atau menggunakan fungsi Q

$$Q = -8 + 2P$$

$$\text{Jika } P = 12$$

$$Q = -8 + 2P$$

$$Q = -8 + 2(12)$$

$$Q = -8 + 24$$

$$Q = 16 \text{ (Qe)}$$

Mencari surplus produsen :

Cara I

$$\begin{aligned}P_s &= Q_e \cdot P_e - \int_0^{Q_e} f(Q) dQ \\&= (16)(12) - \int_0^{16} (0,5Q + 4) dQ \\&= 192 - \int_0^{16} \left(\frac{0,5}{1+1} Q^{1+1} + 4Q\right) dQ \\&= 192 - [0,25Q^2 + 4Q]_0^{16} \\&= 192 - [0,25(16)^2 + 4(16)] - [0,25(0)^2 + 4(0)] \\&= 192 - 128 - 0 \\&= 64\end{aligned}$$

Cara II

$$\begin{aligned}P_s &= \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P) dP \\&= \int_4^{12} (-8 + 2P) dP \\&= \left[-8P + \frac{2}{1+1} P^{1+1}\right]_4^{12} \\&= [-8P + P^2]_4^{12} \\&= [-8(12) + (12)^2] - [-8(4) + (4)^2] \\&= [-96 + 144] - [-32 + 16]\end{aligned}$$

$$= 48 - (-16)$$

$$= 64$$

- 2) Seorang produsen mempunyai fungsi penawaran $P = 3Q + 6$. Berapa surplus produsen jika tingkat harga keseimbangan di pasar adalah 15 serta susunlah ilustrasinya dalam diagram !

Penyelesaiannya:

$P = 3Q + 6$ ubah bentuk fungsinya menjadi fungsi Q maka :

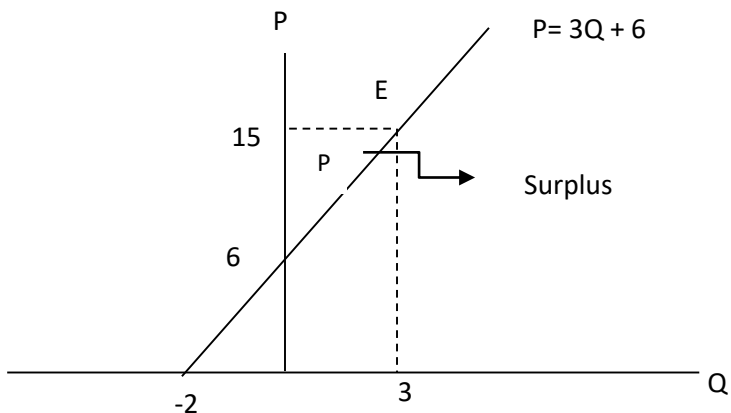
$$P = 3Q + 6$$

$$-3Q = 6 - P$$

$$Q = \frac{6}{-3} + \frac{-P}{-3}$$

$$Q = -2 + 0,33P$$

Mencari titik potong dari fungsi $P = 3Q + 6$



jika $Q = 0$

$$P = 3Q + 6$$

$$P = 3(0) + 6$$

$$P = 0 + 6$$

$$P = 6$$

jika $P = 0$

$$P = 3Q + 6$$

$$0 = 3Q + 6$$

$$-3Q = 6$$

$$Q = 6/-3$$

$$Q = -2$$

jika $P_e = 15$

$$P = 3Q + 6$$

$$15 = 3Q + 6$$

$$-3Q = 6 - 15$$

$$-3Q = -9$$

$$Q = -9/-3$$

$$Q = 3 \text{ (} Q_e \text{)}$$

Mencari surplus produsen :

Cara I

$$P_s = Q_e \cdot P_e \int_0^{Q_e} f(Q) dQ$$

$$= (3) (15) - \int_0^3 (3Q + 6) dQ$$

$$\begin{aligned}
&= 45 - \int_0^3 \left(\frac{3}{1+1} Q^{1+1} + 6Q \right) dQ \\
&= 45 - [1,5Q^2 + 6Q]_0^3 \\
&= 45 - [1,5(3)^2 + 6(3)] - [1,5(0)^2 + 6(0)] \\
&= 45 - 31,5 - 0 \\
&= 13,5
\end{aligned}$$

Cara II

$$\begin{aligned}
P_s &= \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P) dP \\
&= \int_6^{15} (-2 + 0,33P) dP \\
&= \left[-2P + \frac{0,33}{1+1} P^2 \right]_6^{15} \\
&= \left[-2P + 0,165P^2 \right]_6^{15} \\
&= [-2(15) + 0,165(15)^2] - [-2(6) + 0,165(6)^2] \\
&= [-30 + 37,13] - [-12 + 5,94] \\
&= [7,13] - [-6,06] \\
&= 13,19
\end{aligned}$$

C. Latihan

1. Fungsi permintaan pada suatu produk ditunjukkan oleh $P_d = 250 - 2Q^2$ dengan harga keseimbangan $P_E = 100$. Tentukanlah surplus konsumennya menggunakan dua cara yang berbeda serta buatlah ilustrasi surplus konsumen tersebut dalam diagram !
2. Fungsi penawaran suatu produk minuman ditunjukkan pada persamaan $Q = -10 + 8P$. Hitunglah surplus produsennya dengan harga keseimbangan sebesar 20 !
3. Fungsi penawaran dan permintaan terhadap produk ice krim di pasar masing-masing ialah $Q = -50 + 2P$ dan $Q = 65 - 4P$. Tentukanlah surplus yang diperoleh produsen dan konsumen dari kedua persamaan tersebut !
4. Jika fungsi permintaan akan suatu produk adalah $P = 80 - 4Q^2$. Berapakah surplus konsumen pada saat $Q = 10$ dan $P = 30$?
5. Jika fungsi penawaran akan suatu produk adalah $P = 260 + 5Q^2$. Berapakah surplus produsen pada saat $Q = 20$ dan $P = 10$?

D. Referensi

- Dumairy. 2010. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta : BPFE.
- Kalangi, Josep Bintang. 2014. *Matematika Ekonomi dan Bisnis Edisi ke-3*. Jakarta : Salemba Empat.

Wirawan, Nata. 2017. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*.
Denpasar : Keraras Emas.

BAB XVIII

ALJABAR MATRIKS

A. Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari materi pada pertemuan ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Memahami matriks dan ordo suatu matriks
2. Memahami bentuk khas matriks
3. Menghitung hasil pengoperasian matriks
4. Menentukan bentuk transpose matriks

B. Materi

1. Pengertian Matriks

Salah satu hasil penemuan penting dalam bidang matematika adalah matriks dan vektor yang merupakan pengembangan lanjutan dari sistem persamaan linier. Oleh sebab itu, matriks dan vektor disebut dengan istilah *aljabar linier*. Pada pertemuan ke-18 akan dijelaskan konsep yang berkaitan dengan matriks.

Matriks dapat diartikan sebagai suatu susunan bilangan dalam bentuk empat persegi panjang (Supangat: 2006). Matriks diartikan juga sebagai kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam

Matematika Ekonomi dan Bisnis 388

baris dan kolom yang membentuk persegi panjang, serta termuat dalam sepasang tanda kurung (Dumairy: 2007).

Secara umum matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Penulisan matriks dapat menggunakan tanda kurung biasa atau tanda kurung siku. Bilangan-bilangan yang terkandung dalam sebuah matriks disebut dengan *unsur*. Jajaran horizontal unsur matriks disebut dengan *baris* (m), sedangkan jajaran vertikal unsur matriks disebut dengan *kolom* (n).

Secara umum unsur suatu matriks dilambangkan dengan notasi a_{ij} , i menunjukkan baris sedangkan j menunjukkan kolom. Dengan demikian, a_{ij} berarti unsur matriks A pada baris ke- i dan kolom ke- j .

Matriks terdiri dari satu atau sejumlah baris dan satu atau sejumlah kolom. Baris dan kolom pada matriks tidak harus sama jumlahnya. Matriks yang terdiri dari m baris dan n kolom disebut dengan *matriks berordo* $m \times n$. banyaknya baris dan kolom pada matriks melambangkan

ukuran atau ordo dari matriks tersebut. Matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya ($m = n$) disebut dengan *matriks bujursangkar (square matrix)*.

Matriks tidak memiliki nilai numerik. Hal ini bermakna bahwa meskipun matriks merupakan sebuah kumpulan bilangan tetapi matriks tidak melambangkan suatu bilangan. Hal ini berbeda dengan determinan yang memiliki nilai numerik (*akan dipelajari pada pertemuan selanjutnya*).

Contoh matriks

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks A berordo 2×2 karena mempunyai 2 baris dan 2 kolom, sehingga dapat ditulis $A_{2 \times 2}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriks B berordo 3×2 karena mempunyai 3 baris dan 2 kolom, sehingga dapat ditulis $B_{3 \times 2}$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks C berordo 2×3 karena mempunyai 2 baris dan 3 kolom, sehingga dapat ditulis $B_{2 \times 3}$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriks D berordo 3×3 karena mempunyai 3 baris dan 3 kolom, sehingga dapat ditulis $D_{3 \times 3}$

Selain contoh matriks di atas, terdapat matriks yang hanya memiliki satu baris atau satu kolom yang disebut vektor. Vektor adalah bentuk matriks khusus yang hanya mempunyai satu baris atau satu kolom. Vektor dibedakan menjadi 2 yaitu vektor baris dan vektor kolom. Vektor baris adalah matriks sebaris atau matriks berbaris tunggal, sedangkan vektor kolom adalah matriks sekolom atau matriks berkolom tunggal.

Vektor biasanya dilambangkan dengan huruf nonkapital bercetak tebal, tetapi bisa pula dilambangkan dengan huruf kapital karena pada dasarnya vektor juga merupakan sebuah matriks, yaitu matriks berordo $m \times 1$ (vektor kolom) atau berordo $1 \times n$ (vektor baris).

Contoh vektor baris

$$c = [3 \quad 5 \quad 7]$$

$$e = [4 \quad 7 \quad 1 \quad -3]$$

Contoh vektor kolom

$$i = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Unsur suatu vektor dilambangkan dengan huruf kecil sesuai dengan nama vektornya dan diikuti oleh

indeks kolom atau indeks barisnya, sehingga c_{0j} menunjukkan unsur dari vektor baris c kolom ke- j . sedangkan p_{i0} menunjukkan unsur dari vektor kolom p baris ke- i . Pada contoh di atas, c_{03} menunjukkan unsur dari vektor baris c kolom ke-3 yaitu bilangan 7.

Dimensi suatu vektor tercermin dari banyaknya unsur pada vektor yang bersangkutan. Vektor baris yang memiliki n unsur disebut vektor berdimensi n . Vektor kolom yang memiliki m unsur disebut vektor berdimensi m . pada contoh di atas vektor c adalah vektor berdimensi 3 sedangkan vektor p adalah vektor berdimensi 4.

Dua buah matriks dikatakan sama (matriks $A = B$) apabila kedua matriks tersebut berordo sama dan semua unsur yang terkandung di dalamnya sama. Jika matriks A tidak sama dengan matriks B maka ditulis $A \neq B$.

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh di atas, matriks A sama dengan matriks B ($A = B$), tetapi matriks A tidak sama dengan matriks C ($A \neq C$) dan matriks B tidak sama dengan matriks C ($B \neq C$).

Dua buah vektor dikatakan sama apabila keduanya sejenis, sedimensi dan semua unsur yang terkandung didalamnya sama.

Contoh

$$a = [1 \quad -3 \quad 6]$$

$$n = [1 \quad -3 \quad 6]$$

$$k = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh di atas, vektor a sama dengan vektor n ($a = n$), tetapi vektor k tidak sama dengan vektor u ($k \neq u$).

2. Bentuk Khas Matriks

Matriks memiliki berbagai bentuk khas berkaitan dengan unsur-unsur di dalamnya. Berikut adalah bentuk khas dari matriks:

a. Matriks Satuan

Matriks satuan adalah matriks bujursangkar yang semua unsur pada diagonal utamanya adalah angka 1 sedangkan unsur-unsur lainnya adalah nol.

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar yang semua unsurnya adalah nol, kecuali pada diagonal utamanya.

Contoh

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks E merupakan matriks satuan sekaligus juga matriks diagonal.

c. Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks yang semua unsurnya nol.

Contoh

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d. Matriks Ubahan

Matriks ubahan (*transpose matrix*) adalah matriks yang merupakan hasil pengubahan matriks lain yang sudah ada sebelumnya dimana unsur-unsur barisnya menjadi unsur-unsur kolom dan unsur-unsur kolomnya

menjadi unsur-unsur baris. Matriks ubahan biasanya dituliskan dengan menambahkan tanda aksen (') pada notasi matriks aslinya.

Contoh

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad I' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

e. Matriks Simetrik

Matriks simetrik adalah matriks bujursangkar yang sama dengan ubahannya. Matriks J dikatakan simetrik apabila $J = J'$

Contoh

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad J' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

J merupakan matriks simetrik sebab $J = J'$

f. Matriks Simetrik Miring

Matriks simetrik miring adalah matriks bujursangkar yang sama dengan negatif ubahannya. Matriks K dikatakan simetrik miring (*skew symmetrix*) apabila $K = -K'$ atau $K' = -K$.

Contoh

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad K' = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad -K' = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

g. Matriks Balikan

Matriks balikan (*inverse matrix*) adalah matriks yang apabila dikalikan dengan suatu matriks bujursangkar menghasilkan sebuah matriks satuan. Jika L merupakan sebuah matriks bujursangkar maka balikannya ditulis dengan notasi L^{-1} , dan $LL^{-1} = 1$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,2 & -0,8 \\ -0,2 & -0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,2 & -0,2 \end{bmatrix}$$

$$LL^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

L^{-1} adalah balikan dari L

Tidak semua matriks bujur sangkar memiliki balikan.

3. Pengoperasian Matriks

a. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Penjumlahan ataupun pengurangan dua buah matriks hanya dapat dilakukan apabila keduanya memiliki ordo yang sama. Jumlah atau selisih dua matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah sebuah matriks

baru yaitu $C = [c_{ij}]$ berordo sama yang unsur-unsurnya merupakan jumlah atau selisih unsur-unsur A dan B.

$$A \pm B = C \text{ dimana } c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Contoh

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Penjumlahan antarmatriks berlaku kaidah komutatif dan kaidah asosiatif.

Kaidah komutatif: $A + B = B + A$

Kaidah asosiatif: $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

b. Perkalian Matriks dengan Bilangan (Saklar)

Hasil kali sebuah matriks A $[a_{ij}]$ dengan suatu saklar atau bilangan nyata λ adalah sebuah matriks baru B $[b_{ij}]$ yang berordo sama dan unsur-unsurnya λ kali unsur-unsur matriks semula ($b_{ij} = \lambda a_{ij}$). Matriks dikalikan dengan bilangan saklar berarti mengalikan setiap unsur matriks dengan suatu bilangan.

$$\lambda A = B \text{ dimana } b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Untuk perkalian matriks dengan saklar berlaku kaidah komutatif dan kaidah distributif.

$$\text{Kaidah komutatif: } \lambda A = A \lambda$$

$$\text{Kaidah distributif: } \lambda (A \pm B) = \lambda A \pm \lambda B$$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ dikalikan dengan bilangan saklar } \lambda = 4$$

$$\text{maka } \lambda A = 4A = B = \begin{bmatrix} 8 & -16 & 20 \\ 4 & 32 & 12 \\ 16 & 28 & 24 \end{bmatrix}$$

c. Perkalian Matriks dengan Matriks

Dua buah matriks dapat dikalikan jika memenuhi syarat perkalian matriks yaitu banyaknya kolom dari matriks A harus sama dengan banyaknya baris dari matriks B. Jika tidak demikian maka perkalian matriks tidak dapat dilakukan. Hasil kali dua matriks $A_{m \times n}$ dengan $B_{n \times p}$ adalah sebuah matriks baru $C_{m \times p}$ yang unsur-unsurnya merupakan perkalian silang unsur-unsur baris matriks A dengan unsur-unsur kolom matriks B.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Untuk perkalian antarmatriks berlaku kaidah asosiatif dan kaidah distributif tetapi tidak berlaku kaidah komutatif.

Kaidah asosiatif: $A(BC) = (AB)C + ABC$

Kaidah distributif: $A(B + C) = AB + AC$

$(A + B)C = AC + BC$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2.3 + (-3).6 + 5.2 & 2.5 + (-3).(-7) + 5.9 \\ 8.3 + 2.6 + 4.2 & 8.5 + 2.(-7) + 4.9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 76 \\ 44 & 62 \end{bmatrix}$$

d. Perkalian Matriks dengan Vektor

Suatu matriks yang bukan berbentuk vektor hanya dapat dikalikan dengan sebuah vektor kolom dengan catatan jumlah kolom matriks sama dengan dimensi vektor kolom yang bersangkutan. Hasilnya adalah sebuah vektor kolom baru.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times 1} = C_{m \times 1}$$

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 + 3.1 + 5.3 \\ 2.2 + 4.1 + 6.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7 + 2.8 \\ 3.7 + 4.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 53 \end{bmatrix}$$

4. Pengubahan Matriks (Transpose)

Mengubah (*Transpose*) matriks berarti mengubah matriks menjadi matriks baru dengan cara saling menukarkan posisi unsur-unsur baris dan unsur-unsur kolomnya. Transpose dari matriks A dinyatakan dengan A' . Hasil pengubahan matriks disebut dengan matriks ubahan (*transpose*) dilambangkan dengan menambahkan tanda aksen pada notasi matriks aslinya.

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A'_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ ubahannya } A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ ubahannya } B' = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Ubahan dari atau selisish beberapa matriks adalah jumlah atau selisish matriks-matriks ubahannya (Dumairy: 2007)

$$(A_{m \times n} \pm B_{m \times n} \pm C_{m \times n})' = A'_{n \times m} \pm B'_{n \times m} \pm C'_{n \times m}$$

Untuk ubahan penjumlahan, sebagaimana halnya pada operasi penjumlahan matriks, berlaku pula kaidah komutatif dan kaidah asosiatif, yaitu:

$$\text{Kaidah komutatif: } (A + B)' = (B + A)' \text{ atau } A' + B' = B' + A'$$

$$\text{Kaidah asosiatif: } [A + (B + C)]' = [(A + B) + C]' = A' + B' + C'$$

Uban dari perkalian matriks dengan saklar adalah perkalian saklar dengan dengan matriks ubahannya.

$$(\lambda A)' = \lambda A'$$

Uban dari perkalian antar matriks adalah perkalian matriks-matriks ubahannya dengan urutan yang terbalik.

$$(A_{m \times n} \times B_{n \times p} \times C_{p \times q})' = C'_{q \times p} \pm B'_{p \times n} \pm A'_{n \times m}$$

Untuk ubahan perkalian matriks dengan saklar sebagaimana halnya pada operasi perkalian matriks dengan saklar, berlaku kaidah komutatif dan kaidah distributif, yaitu:

$$\text{Komutatif: } (\lambda A)' = (\lambda A)' \text{ atau } \lambda A' = A' \lambda$$

$$\text{Distributif: } [\lambda (A \pm B)]' = (\lambda A \pm \lambda B)' = \lambda A' \pm \lambda B'$$

Adapun untuk ubahan perkalian antarmatriks, seperti halnya pada perkalian antarmatriks, berlaku kaidah asosiatif dan kaidah distributif, yaitu:

Asosiatif

$$[A(BC)]' = [(AB)C]' = (ABC)' = C'B'A'$$

Distributif

$$[A (B \pm C)]' = (AB \pm AC)' = B'A' \pm C'A'$$

$$[(A \pm B) C]' = (AC \pm BC)' = C'A' \pm C'B'$$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Maka

$$(A + B + C)' = \begin{bmatrix} 10 & 19 & 12 \\ 16 & 10 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 19 & 10 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$$

Atau

$$A' + B' + C' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 19 & 10 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$ABC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 566 \\ 294 \end{bmatrix}$$

C. Latihan

1. Jika diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas, tentukan matriks

- AC
 - BA
2. Tentukan ubahan dari matriks dan vektor berikut:

a. $a = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 9 \end{bmatrix}$

b. $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$

d. $D = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

3. Jika diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 9 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 9 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- $(P + Q + R)'$
- $(P - Q - R)'$
- $P' + Q' - R'$

D. Referensi

Al-Arif, M. Nur Rianto, 2013. *"Matematika Terapan Untuk Ekonomi"*. Bandung: Pustaka Setia.

Dumairy. 2017. "*Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*". Edisi 2003/2004. Cet. 12. Yogyakarta: BPFE.

Sillean, S. 2011. "*Matematika Untuk Bisnis dan Ekonomi*". Jakarta: Mitra Wacana Media.

Supangat. Andi. 2006. "*Matematika Terapan Untuk Ekonomi dan Bisnis*". Jakarta: Kencana.

Sunyoto, Danang. 2007. "*Matematika Ekonomi*". Yogyakarta: Ardana.

BAB XIX

DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS

A. Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari materi pada pertemuan ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Memahami konsep determinan dan invers matriks
2. Menghitung determinan dan invers matriks
3. Menyelesaikan persamaan linier menggunakan determinan matriks

B. Materi

1. Determinan Matriks

Determinan dari suatu matriks adalah penulisan unsur-unsur suatu matriks bujursangkar dalam bentuk determinan yaitu diantara sepasang garis tegak ($| \ |$). Determinan dari matriks A biasanya ditulis dalam notasi $|A|$. Determinan berbeda dengan matriks dalam tiga hal (Dumairy: 2007). *Pertama*, determinan unsur-unsurnya diapit dengan tanda kurung garis tegak. *Kedua*, determinan senantiasa berbentuk bujursangkar (jumlah baris = kolom ($m = n$)) sedangkan matriks tidak harus demikian. *Ketiga*, determinan memiliki nilai numerik sedangkan matriks tidak memiliki nilai numerik.

Nilai numerik dari suatu determinan dapat dilakukan dengan cara mengalikan unsur-unsurnya secara diagonal.

Determinan matriks berdimensi dua:

$$\text{Matriks } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ determinan } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\text{Nilai numeriknya } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}; \quad |A| = 2.4 - 5.3 = -7$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}; \quad |B| = 5.8 - 3.7 = 19$$

Determinan matriks berdimensi tiga:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{determinan matriks } A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\text{penyelesaiannya } |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.4.8 - 7.5.3 - 8.6.1 - 9.4.2 \\ = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72$$

$$= 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |B| &= 1.6.2 + 3.4.(-1) + 0.2.0 - (-1).6.0 - 0.4.1 - 2.2.3 \\ &= 12 - 12 + 0 - 0 - 0 - 12 \\ &= -12 \end{aligned}$$

Minor dan Kofaktor

Menyelesaikan determinan menggunakan cara di atas, hanya dapat dilakukan sampai dengan matriks yang berdimensi tiga, dan tidak dapat diterapkan untuk menyelesaikan determinan matriks yang berdimensi lebih tinggi. Berkaitan dengan hal ini, Laplace mengembangkan sebuah solusi yang berlaku umum untuk determinan matriks berdimensi berapapun, yaitu dengan menggunakan minor dan kofaktor.

Penyelesaian determinan berdimensi tiga:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - \\ &a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Dengan mengatur letak suku-sukunya, dapat diubah menjadi:

$$\begin{aligned} |A| &= (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}) + (a_{12}a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}a_{12}) \\ &+ (a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13}) \end{aligned}$$

$$|A| = a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12} (a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$|A| = a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12} (a_{33}a_{21} - a_{23}a_{31}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$|A| = a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

M_{11}
 M_{12}
 M_{13}

$$|A| = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} \quad \text{atau}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot M_{ij}$$

Ternyata dengan “menutup” baris-baris dan kolom-kolom tertentu determinan $|A|$ terdiri atas beberapa determinan bagian (*sub-determinant*). Determinan-determinan ini dinamakan minor. Suatu minor secara umum dilambangkan dengan notasi M_{ij}

M_{11} adalah minor dari unsur a_{11} , diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-1 dari determinan $|A|$

M_{12} adalah minor dari unsur a_{12} , diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-2 dari determinan $|A|$

M_{13} adalah minor dari unsur a_{13} , diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-3 dari determinan $|A|$

Penulisan determinan dalam bentuk minor seperti di atas dapat diubah kedalam penulisan bentuk kofaktor.

Kofaktor dari determinan $|A|$ untuk minor tertentu M_{ij} dilambangkan dengan notasi A_{ij}

Hubungan antara minor dan kofaktor

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

M_{ij} = adalah minor dari unsur a_{ij} yang diperoleh dengan cara menutup baris ke- i dan kolom ke- j dari determinan $|A|$

A_{ij} = adalah kofaktor dari unsur a_{ij}

Dengan demikian:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2 M_{11} = +M_{11}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -M_{12}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^4 M_{13} = +M_{13}$$

Kofaktor A_{ij} praktis adalah sama dengan minor M_{ij} itu sendiri jika $i + j$ menghasilkan bilangan genap, dan A_{ij} adalah negatif dari M_{ij} apabila $i + j$ apabila menghasilkan bilangan ganjil.

Penyelesaian determinan dalam notasi minor:

$$|A| = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} \quad |A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot M_{ij}$$

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} \quad |A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Cara penyelesaian determinan yang dikembangkan oleh Laplace ini, dikenal dengan istilah *metode ekspansi dengan kofaktor*, berlaku untuk determinan berdimensi berapapun.

Contoh

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = -3 \qquad A_{11} = (-1)^2 (-3) = -3$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = -6 \qquad A_{12} = (-1)^3 (-6) = 6$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = -3 \qquad A_{13} = (-1)^4 (-3) = -3$$

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

$$|A| = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3)$$

$$|A| = 0$$

Sifat-sifat Determinan Matriks

Determinan memiliki beberapa sifat khas berkenaan dengan nilai numeriknya (Dumairy: 2007):

- a. Nilai determinan dalah nol jika semua unsurnya sama

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 27 + 27 + 27 - 27 - 27 - 27$$

$$|A| = 0$$

- b. Nilai determinan adalah nol jika terdapat dua baris atau dua kolom yang unsur-unsurnya sama

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 80 + 48 + 30 - 80 - 30 - 48$$

$$|A| = 0$$

- c. Nilai determinan adalah nol jika terdapat dua baris atau dua kolom yang unsur-unsurnya sebanding

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ 4 & 12 & 10 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 160 + 96 + 60 - 160 - 60 - 96$$

$$|A| = 0$$

- d. Nilai determinan adalah nol jika unsur-unsur pada salah satu baris atau kolom semuanya nol

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$|A| = 0$$

- e. Nilai determinan tidak berubah jika semua baris dan kolomnya saling bertukar letak. Dengan kata lain,

determinan dari matriks A sama dengan determinan dari matriks ubahannya

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 54 + 168 + 40 - 105 - 54 - 64$$

$$|A| = 39$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A'| = 54 + 40 + 168 - 105 - 54 - 64$$

$$|A'| = 39$$

- f. Nilai determinan berubah tanda (tetapi harga mutlaknya tetap) jika dua baris atau dua kolomnya bertukar letak

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 54 + 168 + 40 - 105 - 54 - 64$$

$$|A| = 39$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|B| = 54 + 105 + 64 - 168 - 54 - 40$$

$$|B| = -39$$

- g. Determinan dari suatu matriks diagonal adalah hasil kali unsur-unsur diagonalnya

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2.4.5$$

$$|A| = 40$$

- h. Jika setiap unsur pada salah satu baris atau kolom dikalikan dengan suatu bilangan, nilai determinannya adalah sama dengan hasil kalinya dengan bilangan tersebut

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 54 + 168 + 40 - 105 - 54 - 64$$

$$|A| = 39$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A^*| = 108 + 336 + 80 - 210 - 108 - 128$$

$$|A^*| = 78 = 2|A|$$

- i. Jika semua unsur merupakan penjumlahan dari dua bilangan atau lebih determinannya dapat dituliskan sebagai penjumlahan dari dua determinan atau lebih
- j. Jika nilai determinan dari suatu matriks sama dengan nol, matriksnya dikatakan singular dan tidak memiliki balikan (*inverse*). Jadi apabila $|A| = 0$, A merupakan matriks singular dan A^{-1} tidak ada

- k. Jika nilai determinan dari suatu matriks tidak sama dengan nol, matriksnya dikatakan non-singular dan memiliki balikan (*inverse*). Jadi apabila $|A| \neq 0$, A merupakan matriks non-singular dan A^{-1} ada
- l. Pada penguraian determinan (ekspansi Laplace), nilai determinan sama dengan nol jika unsur baris atau kolom dikalikan dengan kofaktor unsur baris atau kolom yang lain, tetapi tidak sama dengan nol jika unsur-unsur baris atau kolom dikalikan dengan kofaktor unsur baris atau kolom itu sendiri

2. Pengembalian Matriks (*Invers*)

Membalik sebuah matriks berarti mencari suatu matriks balikan yang apabila dikalikan dengan matriks aslinya akan menghasilkan matriks satuan (Dumairy: 2007). Invers matriks A adalah matriks balikan dari A. Hal ini dapat disimbolkan dengan A^{-1} . Formulasi dari matriks invers dinyatakan sebagai berikut (Supangat, 2006).

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} (A)$$

Keterangan:

$|A|$ = determinan A

$\text{adj} A$ = adjoin A = *transpose* dari matriks kofaktor

Karena invers matriks A adalah kebalikan dari matriks A-nya, hasil perkalian antara matriks A dengan

inversnya maka akan menghasilkan matriks identitas (Supangat, 2006).

$$A^{-1} \cdot A = I$$

Matriks balikan hanya terdapat pada matriks matriks yang berbentuk bujursangkar. Akan tetapi sebagaimana telah disinggung sebelumnya bahwa tidak semua matriks bujursangkar mempunyai balikan. Hanya matriks-matriks bujursangkar nonsingular (determinannya $\neq 0$) yang memiliki balikan.

a. Pembalikan Matriks Berordo 2x2

Apabila B adalah balikan dari A, maka untuk dapat membentuk B harus diperoleh terlebih dahulu unsur-unsurnya atau b_{ij} . Nilai b_{ij} dapat dihitung berdasarkan penemuan seperti diuraikan seperti berikut:

$$\text{Apabila } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

dan balikannya dilambangkan dengan $A^{-1} = B =$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

maka menurut definisi $AB = I$ haruslah

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \quad a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0$$

$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \quad a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1$$

Dengan menyelesaikan keempat persamaan ini, secara serempak untuk masing-masing b_{ij} diperoleh:

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$b_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$b_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$b_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Perhatikan bahwa faktor pembaginya adalah determinan $|A|$

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{|A|} \quad b_{12} = \frac{-a_{12}}{|A|} \quad b_{21} = \frac{-a_{21}}{|A|}$$

$$b_{22} = \frac{a_{11}}{|A|}$$

Hal ini berarti jika pembagian nol atau $|A| = 0$, b_{ij} tidak terdefinisi dan konsekuensinya matriks balikan B atau A^{-1} tidak dibentuk. Itulah alasan bahwa matriks A tidak mempunyai balikan jika $|A| = 0$

Contoh

Tentukan balikan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4, \text{ berarti } A \text{ non-singular dan } A^{-1} \text{ ada}$$

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{|A|} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$b_{21} = \frac{-a_{21}}{|A|} = \frac{-5}{4} = -1.25$$

$$b_{12} = \frac{-a_{12}}{|A|} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$b_{22} = \frac{a_{11}}{|A|} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{Jadi } A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.75 & -1 \\ -1.25 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tentukan balikan dari matriks } A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ berarti } A \text{ singular dan } A^{-1} \text{ tidak ada}$$

b. Pembalikan Matriks Berordo Lebih Tinggi

Pembalikan matriks yang berordo lebih tinggi pada prinsipnya sama seperti pembalikan matriks berordo 2x2

$$\text{Andaikan } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dan balikkannya $A^{-1} = B$, menurut definisi $AB = I$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = C_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$$

$C_{ik} = 1$ jika $i = k$ dimana $i = 1, 2, \dots, n$

$C_{ik} = 0$ jika $i \neq k$ $k = 1, 2, \dots, n$

dengan cara ini, untuk menentukan sebanyak n^2 unsur-unsur matriks balikkannya (b_{ij}) terdapat n^2 persamaan mengandung b_{ij} yang harus diselesaikan. Jadi, jika matriks yang hendak dibalik berordo 4×4 , berarti terdapat 4^2 unsur matriks balikan yang sama harus dicari. Untuk itu, terdapat 4^2 persamaan (yang mengandung unsur-unsur matriks balikan) yang harus diselesaikan.

c. Pembalikan Matriks dengan Adjoin dan Determinan

Membalik sebuah matriks dapat pula dilakukan dengan menggunakan adjoin dan determinan dari matriks yang bersangkutan. Hubungan suatu matriks bujursangkar yang non-singular dengan adjoin dan determinannya adalah:

$$A^{-1} = \frac{Adj A}{|A|}$$

Berdasarkan hubungan ini, terlihat A^{-1} ada atau dapat dibentuk jika dan hanya jika $|A| \neq 0$

d. Sifat-sifat Balikan

Balikan-balikan matriks mempunyai sifat khas (Dumairy: 2007), yaitu:

- 1) Balikan dari suatu matriks balikan adalah matriks aslinya, $[A^{-1}]^{-1} = A$
- 2) Determinan dari suatu matriks balikan sama dengan kebalikan dari determinan matriks aslinya, $[A^{-1}] = \frac{1}{|A|}$
- 3) Balikan dari suatu matriks ubahan sama dengan ubahan dari matriks balikannya $[A']^{-1} = [A^{-1}]'$
- 4) Balikan dari perkalian dua buah matriks sama dengan perkalian matriks-matriks balikannya dengan urutan terbalik, $[AB]^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- 5) Balikan dari matriks satuan adalah matriks satuan itu sendiri. $I^{-1} = I$

3. Penyelesaian Persamaan Linier Dengan Menggunakan Determinan Matriks

Teori matriks dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Untuk mencari akar-akar dari persamaan linier menggunakan cara

determinan terlebih dahulu bentuk persamaan linier dirubah menjadi bentuk matriks sebagai berikut:

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

bentuk matriksnya adalah $\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$

untuk mencari variabel x:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}} = \frac{ce - fb}{ae - db}$$

dimana: D = Determinan matriks koefisien

D_x = Determinan matriks dengan menggantikan variabel x dengan konstanta

untuk mencari variabel y:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}} = \frac{af - dc}{ae - db}$$

dimana: D = Determinan matriks koefisien

D_y = Determinan matriks dengan menggantikan variabel y dengan konstanta

Contoh

Dengan cara determinan, carilah nilai variabel-variabel x dan y yang memenuhi persamaan $2x + 3y = 21$ dan $x + 4y = 23$

Penyelesaian:

$$2x + 3y = 21 \quad \text{bentuk matriksnya} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$x + 4y = 23$$

untuk mencari variabel x :

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 21 & 3 \\ 23 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{21 \cdot 4 - 23 \cdot 3}{2 \cdot 4 - 1 \cdot 3} = \frac{84 - 69}{8 - 3} = \frac{15}{5} = 3$$

untuk mencari variabel y :

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 21 \\ 1 & 23 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 23 - 1 \cdot 21}{2 \cdot 4 - 1 \cdot 3} = \frac{46 - 21}{8 - 3} = \frac{25}{5} = 5$$

Jadi, nilai x dan y yang memenuhi persamaan $2x + 3y = 21$ dan $x + 4y = 23$ adalah $x = 3$ dan $y = 5$

C. Latihan

1. Tentukan determinan dari matriks di bawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & 10 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

Tentukan determinan dari matriks A serta invers matriksnya jika ada!

3. Dengan menggunakan cara determinan, selesaikan persamaan linier $x - 5y = 13$ dan $x + 2y = 8$!

D. Referensi

- Al-Arif, M. Nur Rianto, 2013. "*Matematika Terapan Untuk Ekonomi*". Bandung: Pustaka Setia.
- Dumairy. 2017. "*Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*". Edisi 2003/2004. Cet. 12. Yogyakarta: BPFE.
- Siliean, S. 2011. "*Matematika Untuk Bisnis dan Ekonomi*". Jakarta: Mitra Wacana Media.
- Supangat. Andi. 2006. "*Matematika Terapan Untuk Ekonomi dan Bisnis*". Jakarta: Kencana.
- Sunyoto, Danang. 2007. "*Matematika Ekonomi*". Yogyakarta: Ardana.

BAB XX

PROGRAM LINEAR (METODE GRAFIK)

A. Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari materi pada pertemuan ini, diharapkan mahasiswa mampu Memahami konsep program linear, Menghitung persamaan dengan menggunakan konsep program linear, dan Menganalisis permasalahan program linear dalam kasus kehidupan sehari-hari ke dalam bentuk program linear.

B. Materi

1. Definisi

Program linear merupakan model optimasi persamaan linear yang berkenaan dengan kendala-kendala pada linear. Masalah dalam program linear seperti masalah tentang mencari nilai optimum baik itu maksimum ataupun minimum dari sebuah fungsi linear pada suatu sistem atau sehimpun kendala linear. Apabila ingin menentukan nilai optimum dari fungsi linear yang berbentuk persamaan disebut fungsi tujuan. Sedangkan yang dinamakan fungsi kendala adalah fungsi-fungsi linear yang harus terpenuhi dalam optimasi pada fungsi

tujuan dan berbentuk persamaan ataupun pertidaksamaan.

Berikut merupakan bentuk umum model program linear:

Tabel 20. 1 Bentuk umum model program linear

Persoalan maksimum	Persoalan minimum
Maksimum $f(x, y) = ax + by$	Minimum $f(x, y) = ax + by$
Syarat : $c_1 + d_1y \leq k_1$ $c_2 + d_2y \leq k_2$ $x \geq 0$ $y \geq 0$	Syarat : $m_1 + n_1y \geq k_1$ $m + n_2y \geq k_2$ $x \leq 0$ $y \leq 0$
Dengan a, b, c, d adalah koefisien dan k adalah konstanta	Dengan a, b, m, n adalah koefisien dan k adalah konstanta

Berdasarkan tabel di atas, dapat diketahui bahwa perbedaan antara persoalan maksimum dan minimum adalah terletak pada tanda $\leq$ dan $\geq$. Jika persoalan maksimum dinyatakan dengan tanda $\leq$ pada persamaan linearnya, sedangkan pada persoalan minimum dinyatakan dengan tanda $\geq$ pada persamaan linearnya. Sedangkan untuk variabel a, b, c, d pada persoalan maksimum merupakan koefisien dan k merupakan

konstanta. Begitu juga dengan persoalan minimum variabel a, b, m, n merupakan koefisien dan k merupakan konstanta.

Berikut merupakan beberapa masalah yang dapat dikatakan masalah dalam program linear:

- a. Terdapat tujuan yang dicapai, dalam model matematika fungsi tujuan dalam bentuk linear
- b. Terdapat input yang berada dalam keadaan terbatas yang dapat dirumuskan dalam hubungan linear yaitu pertidaksamaan linear
- c. Pola masalah umum yang bisa dibuat dalam model program linear harus memenuhi syarat sebagai berikut:
 - 1) Terdapat kombinasi beberapa faktor kegiatan
 - 2) Terdapat sumber penunjang beserta batasnya
 - 3) Terdapat fungsi tujuan yang harus dioptimalkan
 - 4) Bahwa hubungan yang timbulantara faktor-faktornya linear

Seperti yang sudah dibahas di atas bahwa Program linear merupakan model optimasi persamaan linear yang berkenaan dengan kendala-kendala pada linear, maka dari itu persoalan optimasi dalam program linear merupakan persoalan bagaimana menentukan nilai dari masing-masing variabel dengan tujuan agar fungsi linear menjadi maksimum ataupun minimum dengan mempertimbangkan batasan atau kendala yang ada. Fungsi yang digunakan berupa pertidaksamaan linear

dua variabel. Oleh sebab itu sebelum menyelesaikan persoalan menggunakan program linear, sebelumnya kita harus memahami terlebih dahulu apa itu pertidaksamaan linear dua variabel.

Pertidaksamaan linear dapat dinyatakan dengan bentuk :

$$ax + by \geq c$$

$$ax + by > c$$

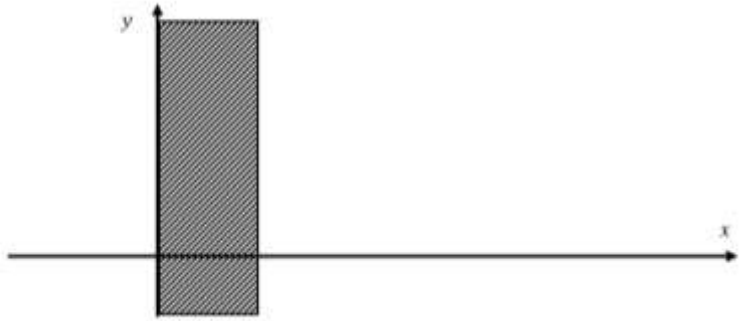
$$ax + by \leq c$$

Atau

$$ax + by < c$$

Di dalam pertidaksamaan linear terdapat himpunan penyelesaian yang dituliskan secara berpasangan antara titik x dan y . Himpunan penyelesaian dituliskan secara berurutan (x, y) yang terdapat dalam gambar diagram cartesius. Daerah himpunan penyelesaian ditandai dengan daerah arsiran dalam diagram cartesius. Berikut merupakan contoh gambar atau letak dalam menentukan daerah penyelesaian pada suatu pertidaksamaan linear:

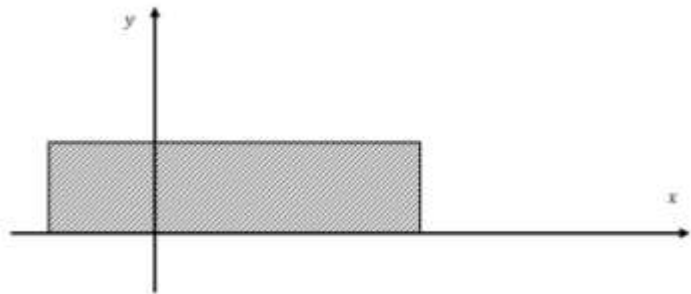
1. Pertidaksamaan $x \geq 0$



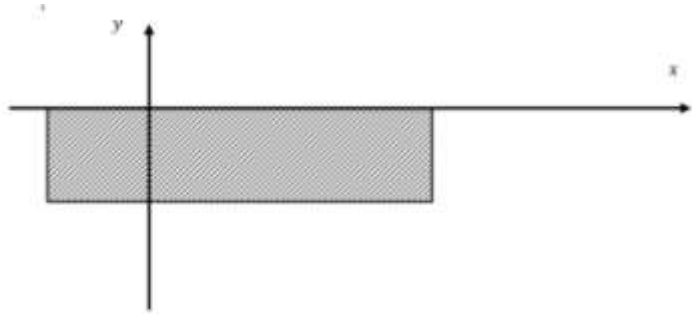
2. Pertidaksamaan $x \leq 0$



3. Pertidaksamaan $y \geq 0$



4. Pertidaksamaan $y \leq 0$



Berikut merupakan contoh menentukan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linear:

Contoh 1:

Tentukan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linear berikut ini :

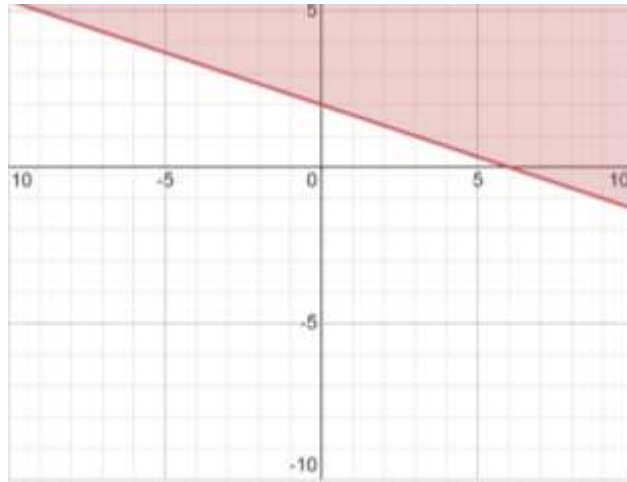
1. $x + 3y \geq 6$
2. $2x - 5y \leq 10$

Penyelesaian:

1. $x + 3y \geq 6$ diubah kedalam bentuk persamaan $x + 3y = 6$ untuk menentukan titik koordinatnya.

x	0	6
y	2	0
(x, y)	$(0, 2)$	$(6, 0)$

Maka gambar grafik pertidaksamaan dari $x + 3y \geq 6$ adalah sebagai berikut:

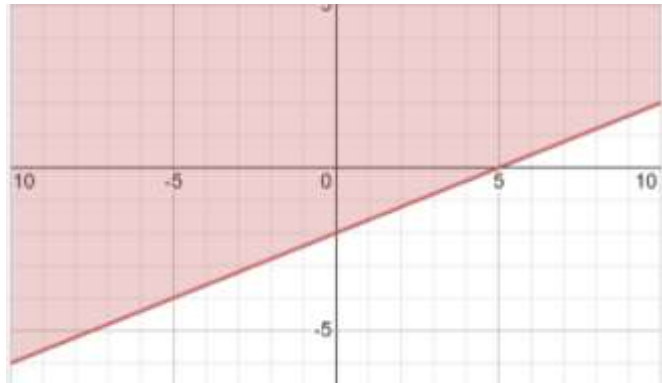


Berdasarkan gambar grafik di atas warna merah merupakan daerah penyelesaiannya.

2. $2x - 5y \leq 10$ diubah kedalam bentuk persamaan $2x - 5y = 10$ untuk menentukan titik koordinatnya.

x	0	5
y	-2	0
(x, y)	$(0, -2)$	$(5, 0)$

Maka gambar grafik pertidaksamaan dari $2x - 5y \leq 10$ adalah sebagai berikut:



Berdasarkan gambar grafik di atas warna merah merupakan daerah penyelesaiannya.

Contoh 2:

Diketahui pertidaksamaan berikut ini

$$2x + 5y \leq 10$$

$$x + 2y \leq 4$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Tentukan himpunan penyelesaiannya!

Penyelesaian :

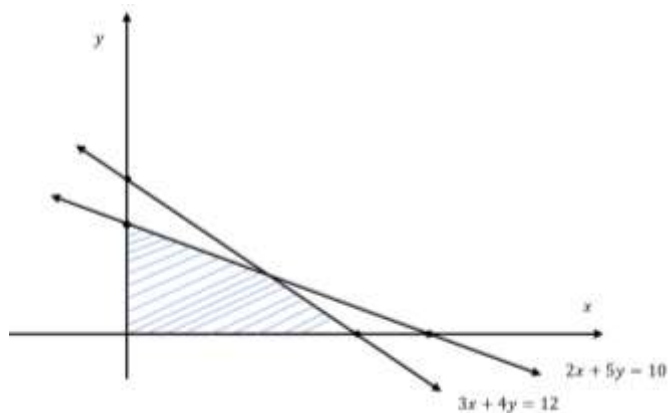
$$2x + 5y = 10$$

x	0	5
y	2	0
(x, y)	$(0, 2)$	$(5, 0)$

$$3x + 4y = 12$$

x	0	4
y	3	0
(x, y)	(0, 3)	(4, 0)

Maka bentuk gambar grafiknya dari ke empat pertidaksamaan di atas adalah sebagai berikut:



Sehingga titik potong antara $2x + 5y = 10$ dan $3x + 4y = 12$ adalah sebagai berikut:

$$2x + 5y = 10 \quad \times 3 \quad 6x + 15y = 30$$

$$3x + 4y = 12 \quad \times 2 \quad 6x + 8y = 24 \quad -$$

$$7y = 6$$

$$\text{Sehingga nilai } y = \frac{6}{7} = 0,8572x + 5\left(\frac{6}{7}\right) = 10$$

$$2x + \frac{30}{7} = 10$$

$$2x = 10 - \frac{30}{7}$$

$$x = 2,857$$

Maka titik potong antara kedua pertidaksamaan tersebut adalah $(2,857; 0,857)$

2. Metode Grafik

Metode grafik merupakan salah satu metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persoalan mengenai program linear. Metode grafik hanya bisa digunakan dalam menyelesaikan masalah dengan dua variabel keputusan saja.

Berikut merupakan langkah-langkah dalam metode grafik:

- a. Memformulasikan persoalan program linear
- b. Membuat grafik dan menentukan garis batasan
- c. Menentukan sisi palit dari setiap garis pembatas
- d. Mengidentifikasi wilayah atau daerah penyelesaian
- e. Menemukan titik optimum
- f. Menghitung koordinat titik optimum
- g. Mengevaluasi fungsi tujuan

Contoh 1:

Tanah seluas 10.000 m^2 akan dibangun rumah tipe A dan tipe B. Untuk rumah tipe A diperlukan 100 m^2 dan tipe B diperlukan 75 m^2 . Jumlah rumah yang dibangun paling banyak 125 unit. Keuntungan rumah tipe A adalah Rp. 6.000.000,00/unit dan tipe B adalah Rp. 4.000.000,00/unit. Tentukanlah keuntungan maksimum yang dapat diperoleh dari penjualan rumah tersebut!

Penyelesaian :

Misalnya :

X = rumah tipe A

Y = rumah tipe B

Maksimum fungsi tujuan: $z = 6.000.000 x + 4.000.000 y$

Kendala – kendala:

a. $100x + 75y \leq 10.000$ (disederhanakan dengan dibagi 25)

$$4x + 3y \leq 400$$

b. $x + y \leq 125$

Menentukan titik potong fungsi:

Untuk pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$

Untuk $x = 0$; maka $4(0) + 3y = 400$

$$Y = \frac{400}{3} = 133 \rightarrow \text{titik potongnya } (0,133)$$

Untuk $y = 0$; maka $4x + 3(0) = 400$

$$X = \frac{400}{4} = 100 \rightarrow \text{titik}$$

potongnya (100,0)

Untuk pertidaksamaan $x + y \leq 125$

Untuk $x = 0$; maka $(0) + y = 125 \rightarrow \text{titik potongnya } (0,125)$

Untuk $y = 0$; maka $x + (0) = 125 \rightarrow \text{titik potongnya } (125,0)$

Eliminasi persamaan (1) dan (2).

a. $4x + 3y = 400$ | $\times 1$ | $4x + 3y = 400$

b. $X + y = 125$ | $\times 4$ | $4x + 4y = 500$ (-)

$$-Y = -100$$

$$Y = 100$$

Substitusi $y = 100$ ke persamaan $x + y = 125$

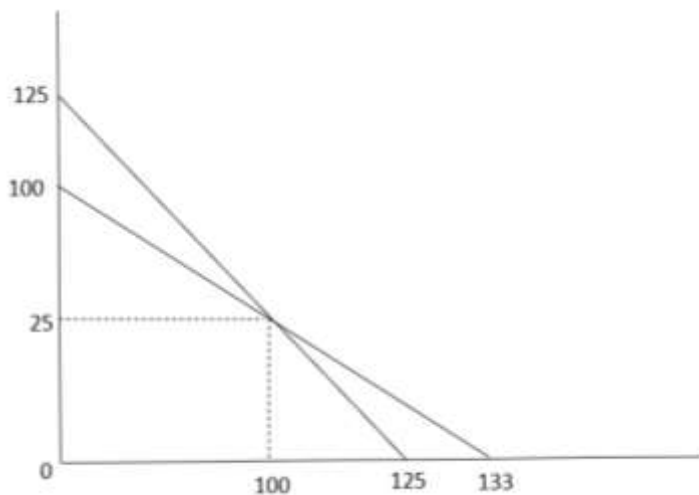
$$X + 100 = 125$$

$$X = 125 - 100$$

$$= 25$$

Titik potongnya (25, 100)

Gambar grafiknya;



Keuntungan maksimum (Z) = 6.000.000 x + 4.000.000 y

a. (0,100) $\rightarrow Z = 6.000.000 x + 4.000.000 y$
 $= 6.000.000 (0) + 4.000.000 (100)$

$$= 0 + 400.000.000 = 400.000.000$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (125,0) &\rightarrow Z = 6.000.000 x + 4.000.000 y \\ &= 6.000.000 (125) + 4.000.000 (0) \\ &= 7.500.000 x + 0 = 7.500.000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } (100,25) &\rightarrow Z = 6.000.000 X + 4.000.000 Y \\ &= 6.000.000 (100) + 4.000.000 (25) \\ &= 600.000.000 + 100.000.000 = 700.000.000 \end{aligned}$$

Jadi, keuntungan maksimum adalah Rp. 7.500.000,- apabila hanya dilakukan pembangunan rumah tipe A saja. Sedangkan apabila dibangun rumah tipe A dan tipe B sekaligus keuntungan maksimum Rp. 700.000.000,- dengan membangun 100 rumah tipe A dan 25 rumah tipe B.

Contoh 2:

Ibu susi adalah seorang penjahit yang mempunyai 60 m kain katun dan 40 m kain sutra. Dari bahan-bahan tersebut akan dibuat setelan kemeja dan celana. 1 stel kemeja membutuhkan 3 m kain katun dan 1 m kain sutra. Kemudian 1 stel celana membutuhkan 2 m kain katun dan 2 m kainn sutra. Jika terjual ibu susi mempunyai pendapatan disetiap stel kemeja dan celana sebesar Rp120.000,- dan Rp75.000,-. Tentukan laba maksimum yang diperoleh oleh ibu susi!

Penyelesaian :

Misalkan kemeja = x

dan celana = y

maka didapat tabel

Jenis kain	katun	sutra	Laba
ketrangan: x	3	1	120.000
celana y	2	2	75.000

Dengan fungsi tujuan $120.000x + 75.000y$

Dan fungsi kendala

$$3x + 2y \leq 60$$

$$x + 2y \leq 40$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Berdasarkan pertidaksamaan di atas dapat ditentukan gariknya

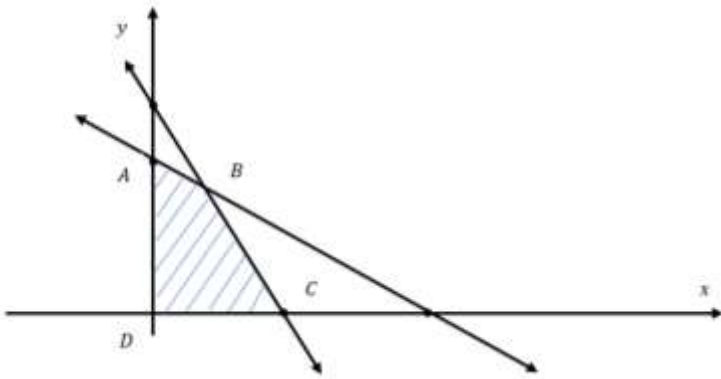
$$3x + 2y = 60$$

x	0	20
y	30	0
(x, y)	(0, 30)	(20, 0)

$$x + 2y = 40$$

x	0	40
y	20	0
(x, y)	(0, 20)	(40, 0)

Gambar grafiknya adalah sebagai berikut:



Menentukan titik potong B

$$3x + 2y = 60$$

$$x + 2y = 40$$

$3x + 2y = 60$	$\times 1$	$3x + 2y = 60$	
$+ 2y = 40$	$\times 3$	<u>$3x + 6y = 120$</u>	$-$
		$-4y = -60$	

$$y = 15$$

$$x + 2(15) = 40$$

$$x + 30 = 40$$

$$x = 40 - 30$$

$$x = 10$$

Sehingga titik potong B adalah $(10, 15)$

Maka untuk mencari laba maksimum adalah:

Titik	$f(x, y) = 120.000x + 75.000y$	Nilai
$A(0, 20)$	$120.000(0) + 75.000(20)$	1.500.000
$B(10, 15)$	$120.000(10) + 75.000(15)$	2.325.000
$C(20, 0)$	$120.000(20) + 75.000(0)$	2.400.000
$D(0, 0)$	0	0

Sehingga didapat laba maksimum 2.400.000 pada titik $C(20, 0)$

C. Latihan

1. Pak hendri memiliki toko buah yang ingin di isi dengan buah mangga paling sedikit sebanyak 100 dan buah belimbing paling dikit sebanyak 150. Sedangkan toko bangunan tersebut hanya dapat menampung 400 buah saja. Keuntungan dari buah mangga adalah sebesar Rp 10.000,00 dan keuntungan untuk buah belimbing adalah sebesar Rp 5.000,00. Abalila banyaknya buah dalam took tersebut tidak bisa melebihi 150 buah. Maka tentukan keuntungan maksimal dari penjualan buah-buah tersebut!
2. Produsen suatu barang memiliki dua macam jenis bahan. Bahan yang pertama sebanyak 8 unit dan bahan yang kedua sebanyak 5 unit. Produsen tersebut berkeinginan untuk memproduksi jenik produk A dan produk B. jika

produk A untuk satu unit produk membutuhkan 2 unit dari bahan pertama dan 1 unit dari bahan kedua, sedangkan produk B untuk satu unit produk membutuhkan 3 unit dari bahan pertama dan 2 unit dari bahan kedua. Dan harga pasar pada produk A sebesar Rp 15.000,00 per unit dan harga pasar untuk produk B sebesar Rp 10.000,00 per unit. Tentukan berapakah yang harus diproduksi produsen tersebut untuk menghasilkan keuntungan yang maksimum?

3. Suatu produsen kayu ingin menghasilkan dua produk buataannya yaitu meja dan kursi. Untuk menghasilkan 1 unit meja membutuhkan 2 jam perakitan dan 4 jam pengecatan. Sedangkan untuk menghasilkan 1 unit kursi membutuhkan 4 jam perakitan dan 2 jam pengecatan. Apabila pada bagian perakitan tersedia waktu 60 jam pengerjaan dan 48 jam pengerjaan untuk bagian pengecatan, tentukan keuntungan maksimal yang dapat dihasilkan dalam memproduksi setiap meja dan kursi jika 1 unit meja dan 1 unit kursi masing-masing Rp 80.000,00 dan Rp 60.000,00!

D. Referensi

- Chaerani, Diah, dkk, 2020. *Pemodelan Riset Operasi dan Optimisasi*. Sumedang: Alqaprint Jatinangor.
- Dumairy. (2010) *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*, BPFE, Yogyakarta.

- Mesra, B. (2016) Penerapan Ilmu Matematika dalam Ekonomi dan Bisnis. Yogyakarta: CV Budi Utama.
- Olivier, J. (2017) Business Math: A Step by Step Handbook. Canada: Creative Commons License (CC BY-NC-SA).
- Prawirosentono, Suyadi. 2019. Riset Operasi & Ekonofisika. Jakarta: Bumi Aksara.
- Putrodjoyo G dan Untung Rahardja. (2015) Matematika Ekonomi. Jakarta: PT. Grasindo.
- Rinaldi. (2020). Buku Ajar Matematika Ekonomi. Jakarta: FEB Universitas Persada Indonesia.
- Sessu, A. (2017) Pengantar Matematika Ekonomi. Jakarta: PT Bumi Aksara.

BAB XXI

PROGRAM LINEAR (METODE SIMPLEKS)

A. Capaian Pembelajaran

Setelah selesai mempelajari materi pada pertemuan ini, diharapkan mahasiswa mampu:

1. Menganalisis konsep dari program linear.
2. Menggunakan pemrograman linear dengan metode simpleks untuk menyelesaikan masalah optimasi.

B. Materi

1. Metode Simpleks

Salah satu metode yang digunakan untuk penyelesaian permasalahan program linear selain metode grafik adalah metode simpleks. Sebelum mempelajari metode simpleks, diharapkan anda sudah paham terlebih dahulu tentang penyelesaian masalah program linear dengan metode grafik yang telah dibahas sebelumnya. Apabila suatu program linear hanya mengandung dua variabel, maka dapat diselesaikan dengan metode grafik. Seperti apa fungsi yang disebut mempunyai dua variabel itu? Mari kita simak contohnya sebagai berikut:

$$Z = 3.000x + 10.000y$$

Pada contoh fungsi Z di atas, kita mempunyai 2 variabel yaitu variabel x dan variabel y . Akan tetapi, apabila suatu program linear mempunyai lebih dari 2 variabel maka penyelesaian menggunakan metode grafik menjadi tidak efektif lagi untuk digunakan. Oleh sebab itu, untuk menyelesaikan masalah program linear yang mempunyai lebih dari 2 variabel akan lebih efisien apabila menggunakan metode simpleks. Seperti apa fungsi yang memiliki lebih dari dua variabel itu? Mari simak penjelasan contoh berikut.

$$Z = 50x_1 + 10x_2 + 25x_3$$

Pada contoh fungsi tersebut, kita mempunyai 3 variabel yaitu variabel x_1 , variabel x_2 dan variabel x_3 . Metode simpleks ini diharapkan dapat menyelesaikan permasalahan program linear yang mempunyai banyak variabel, karena pada kenyataannya di dalam dunia industri terdapat banyak masalah program linear yang multivariable. Permasalahan multivariable dalam dunia ekonomi dan bisnis ini biasanya menggunakan variabelnya lebih dari 3 dan tidak memungkinkan bagi kita menyelesaikannya menggunakan metode grafik dikarenakan lebih efektif menggunakan metode simpleks. Maka dari itu metode simpleks merupakan salah satu metode dalam menyelesaikan persoalan program linear yang kompleks dikarenakan mempunyai keputusan lebih besar atau lebih dari dua variabel keputusan.

Di dalam program linear kita mengenal dua bentuk fungsi, yaitu:

a. Fungsi tujuan (*objective function*)

Fungsi tujuan adalah fungsi yang menggambarkan tujuan atau sasaran yang akan dioptimumkan baik maksimasi maupun minimasi serta berkaitan dengan kendala yang dihadapi. Nilai yang akan dioptimumkan ini biasanya dinyatakan dengan Z.

b. Fungsi Batasan/kendala (*constrain function*)

Fungsi Batasan merupakan bentuk pemodelan matematika dari batasan-batasan kapasitas yang tersedia yang akan dialokasikan secara optimum ke berbagai kegiatan.

2. Bentuk Umum Metode Simpleks

a. Bentuk maksimasi

Fungsi tujuan

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$Z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

Fungsi Kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \leq b_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

atau

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i \leq b_i$$

b. Bentuk memaksimumkan

Fungsi tujuan

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$z = \sum_{i=1}^n c_ix_i$$

Fungsi Kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \geq b_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

atau

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i \geq b_i$$

Beberapa istilah dalam metode Simpleks

a. Nilai Kanan (NK/HRS)

Nilai kanan (NK/HRS) merupakan nilai yang berada di kanan tanda sama dengan (=). Nilai kanan (NK/HRS) dari fungsi tujuan haruslah bernilai 0 (nol). Sedangkan Nilai kanan (NK/HRS) dari fungsi kendalanya haruslah

bernilai + (positif), apabila nilai kanan dari fungsi kendalanya bernilai negative maka harus dirubah bentuk dengan mengalikannya -1.

- b. Variabel Dasar (VD) merupakan variabel yang nilainya sama dengan sisi kananya persamaan.
- c. Fungsi kendala atau fungsi Batasan yang berbentuk pertidaksamaan dengan tanda kurang dari sama dengan ($\leq$) atau lebih dari sama dengan ($\geq$) harus dirubah ke bentuk persamaan dengan tanda sama dengan (=) dan menambahkan variabel slack/surplus.
- d. Variabel slack merupakan variabel tambahan yang memiliki tingkat pengangguran atau kapasitas yang merupakan batasan.

3. Langkah-Langkah Metode Simpleks

Karena program linear merupakan sebuah pemodelan, maka beberapa langkah yang harus dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan program linear dengan metode simpleks adalah sebagai berikut:

- a. Mengubah model persamaan linear ke dalam bentuk kanonik.

Artinya kita pindah variabel ke satu sisi (ruas) saja. Semua fungsi kendala berupa persamaan dengan cara menambahkan variabel slack.

- b. Menyusun fungsi-fungsi persamaan ke dalam table simpleks.

Koefisien-koefisien dari fungsi tujuan, fungsi kendala (batasan) dan variabel slack harus dibuat ke dalam table simpleks.

- c. Menentukan kolom kunci (pivot).

Kolom kunci merupakan kolom dasar untuk mengubah table simpleks. Cara pemilihan kolom kunci adalah dengan melihat baris fungsi tujuan Z kemudian pilih angka negative dengan angka terbesar.

- d. Menentukan baris kunci (pivot) dan angka kunci (pivot).

Baris kunci merupakan baris dasar untuk mengubah table simpleks dengan cara mencari nilai indeks dari tiap baris dengan membagi nilai pada NK dengan nilai yang sebaris dengan kolom kunci. Untuk memilih baris kunci pilihlah angka positif terkecilnya. Pertemuan antara baris kunci dan kolom kunci disebut angka kunci.

$$indeks = \frac{\text{nilai kanan}}{\text{kolom kunci}}$$

- e. Mengubah nilai-nilai baris kunci

Nilai baris kunci dirubah dengan cara membagi angka tersebut dengan nilai kunci.

$$\text{baris baru kunci} = \frac{\text{baris kunci}}{\text{angka kunci}}$$

- f. Mengubah nilai-nilai selain pada baris kunci dengan cara:

Baris baru = baris lama – (koefisien kolom kunci x nilai baru baris kunci)

- g. Lanjutkan perbaikan dengan cara iterasi.

Ulangi langkah-langkah perbaikan (iterasi) mulai langkah ke 3 sampai langkah ke 6 untuk memperbaiki table-tabel yang nilainya sudah dirubah. Perbaikan atau proses iterasi ini akan berhenti apabila nilai yang terdapat pada baris Z sudah bernilai positif semua atau tidak ada nilai yang negative. Namun apabila pada baris Z masih terdapat nilai negative maka proses iterasi akan terus dilanjutkan.

h. Membuat kesimpulan jawaban.

Contoh:

1) Maksimumkan fungsi $Z = 5x_1 + 6x_2$

Dengan fungsi kendala:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12$$

Penyelesaian:

a) Mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala dalam bentuk kanonik

Fungsi tujuan

$$Z = 5x_1 + 6x_2 \text{ diubah menjadi bentuk } Z - 5x_1 - 6x_2 = 0$$

Fungsi Batasan (dirubah menjadi bentuk persamaan dan ditambah variabel slack)

$$4x_1 + 2x_2 \leq 8. \rightarrow 4x_1 + 2x_2 + S_1 = 8$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12 \rightarrow 3x_1 + 4x_2 + S_2 = 12$$

b) Membuat tabel simpleks

Masukkan angka-angka koefisien dari variabel ke dalam table simpleks.

VD	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	NK
Z	1	-5	-6	0	0	0
S_1	0	4	2	1	0	8
S_2	0	3	4	0	1	12

c) Memilih kolom kunci

Perhatikan baris fungsi pertama atau baris fungsi tujuan Z, bilangan negative terbesar adalah -6. Maka x_2 merupakan kolom kunci. Apabila suatu table tidak memiliki nilai negative pada baris fungsi tujuannya maka table tersebut tidak dapat dioptimalkan lagi (sudah optimal).

VD	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	NK
Z	1	-5	-6	0	0	0
S_1	0	4	2	1	0	8
S_2	0	3	4	0	1	12

Memilih baris kunci

Baris kunci diperoleh dari baris dengan nilai indeks positif terkecil.

VD	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	NK	Indeks
Z	1	-5	-6	0	0	0	~
S_1	0	4	2	1	0	8	4
S_2	0	3	4	0	1	2	12

d. Mengubah nilai-nilai baris kunci

Baris kunci (S_2)

$$\begin{array}{rcl}
 (4) & [0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 12] : \\
 \hline
 \text{Nilai Baru} = & [0 & 3/4 & 1 & 0 & 1/4 & 3]
 \end{array}$$

e. Mengubah nilai-nilai selain pada baris kunci (iterasi 1)

Baris pertama (Z)

$$\begin{array}{rcl}
 & [1 & -5 & -6 & 0 & 0 & 0] \\
 (-6) & [0 & 3/4 & 1 & 0 & 1/4 & 3] & (-) \\
 \hline
 \text{Nilai Baru} = & [1 & -1/2 & 0 & 0 & 3/2 & 18]
 \end{array}$$

Baris Kedua (S_1)

$$\begin{array}{rcl}
 & [0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 8] \\
 (2) & [0 & 3/4 & 1 & 0 & 1/4 & 3] & (-) \\
 \hline
 \text{Nilai Baru} = & [0 & 5/2 & 0 & 1 & -1/2 & 2]
 \end{array}$$

Tabel Iterasi 2

VD	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	NK	Indeks
Z	1	-1/2	0	0	3/2	18	
S_1	0	5/2	0	1	-1/2	2	4/5
x_2	0	3/4	1	0	1/4	3	4

Baris kunci (S_1)

	(5/2)	[0	5/2	0	1	-1/2	2]
Nilai Baru =		[0	1	0	2/5	-1/5	4/5]

Baris pertama (Z)

		[1	-1/2	0	0	3/2	18]	
	(-1/2)	[0	1	0	2/5	-1/5	4/5]	(-)
Nilai Baru =		[1	0	0	1/5	7/5	92/5]	

Baris Ketiga (S_2)

		[0	3/4	1	0	1/4	3]	
	(3/4)	[0	1	0	2/5	-1/5	4/5]	(-)
Nilai Baru =		[0	0	1	-3/10	2/5	12/5]	

Tabel Baru

VD	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	NK
Z	1	0	0	1/5	7/5	92/5
x_1	0	1	0	2/5	-1/5	4/5
x_2	0	0	1	-3/10	2/5	12/5

Karena baris Z sudah tidak ada yang bernilai negative dan sudah bernilai positif semua maka iterasi berhenti sampai disini, dan diperoleh:

$$x_1 = 4/5$$

$$x_2 = 12/5$$

- 2) Shea memiliki pabrik parfum yang bahan-bahannya di dapat dari bunga berkualitas. Dia menjual 3 macam produk parfum yaitu Starlight, Romantic dan Harmony. Untuk membuat parfum Starlight diperlukan 6 mawar, 5 melati dan 4 lily. Romantic memerlukan 8 mawar, 5 melati dan 5 lily. Sedangkan Harmony memerlukan 10 mawar, 5 melati dan 6 lily. Persediaan bunga yang dimiliki Shea adalah 340 mawar, 150 melati dan 200 lily. Harga jual untuk parfum Starlight sebesar 150 ; Romantic sebesar 120 dan Harmony sebesar 130. Berdasarkan data tersebut, hitunglah pendapatan maksimal yang diperoleh Shea!

Penyelesaian:

Ubah dalam bentuk matematika:

Misal : x_1 = Starlight

x_2 = Romantic

x_3 = Harmony

Fungsi tujuan : $Z = 150x_1 + 120x_2 + 130x_3$

Fungsi kendala : $6x_1 + 8x_2 + 10x_3 \leq 340$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 150$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 200$$

- a) Mengubah fungsi tujuan dan kendala menjadi fungsi kanonik

$$\text{Fungsi tujuan : } Z - 150x_1 - 120x_2 - 130x_3 = 0$$

$$\text{Fungsi kendala : } 6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + S_1 = 340$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + S_2 = 150$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + S_3 = 200$$

- b) Membuat tabel simpleks

VD	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	NK
Z	1	-150	-120	-130	0	0	0	0
S_1	0	6	8	10	1	0	0	340
S_2	0	5	5	5	0	1	0	150
S_3	0	4	5	6	0	0	1	200

- c) Memilih kolom kunci, baris kunci dan angka kunci

VD	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z	1	-150	-120	-130	0	0	0	0	-
S_1	0	6	8	10	1	0	0	340	170/3
S_2	0	5	5	5	0	1	0	150	30
S_3	0	4	5	6	0	0	1	200	50

d) Mengubah nilai nilai baris kunci

Baris kunci (S2)

$$(5) [0 \ 5 \ 5 \ 5 \ 0 \ 1 \ 0 \ 150] :$$

$$\text{Nilai} = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1/5 \ 0 \ 30]$$

Baru

e) Mengubah nilai-nilai selain baris kunci

Baris pertama (Z)

$$[1 \ -150 \ -120 \ -130 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$(-150) [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1/5 \ 0 \ 30] \quad (-)$$

$$\text{Nilai} = [1 \ 0 \ 30 \ 20 \ 0 \ 30 \ 0 \ 4.500]$$

Baru

Baris kedua (S1)

$$[0 \ 6 \ 8 \ 10 \ 1 \ 0 \ 0 \ 340]$$

$$(6) [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1/5 \ 0 \ 30] \quad (-)$$

$$\text{Nilai} = [0 \ 0 \ 2 \ 4 \ 1 \ -6/5 \ 0 \ 160]$$

Baru

Baris keempat (S3)

$$[0 \ 4 \ 5 \ 6 \ 0 \ 0 \ 1 \ 200]$$

$$(4) [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1/5 \ 0 \ 30] \quad (-)$$

$$\text{Nilai} = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0 \ -4/5 \ 1 \ 80]$$

Baru

Tabel Baru

VD	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	NK
Z	1	0	30	20	0	30	0	4.500
S_1	0	0	2	4	1	-6/5	0	160
x_1	0	1	1	1	0	1/5	0	30
S_2	0	0	1	2	0	-4/5	1	80

Karena baris Z sudah tidak ada nilai yang negative, maka iterasi sudah selesai.

Kesimpulan : Shea mendapatkan pendapatan maksimal dari penjualan parfum sebesar 4.500 dengan menjual parfum jenis Starlight (x_1) sebanyak 30 buah.

C. Latihan

1. Alea bakery akan membuat kue brownies dan bika ambon. Kue brownies terbuat dari tepung terigu 4 kg, sedangkan bika ambon terbuat dari tepung tapioca 6 kg dan tepung terigu 4 kg. dalam proses pembuatannya dibutuhkan 2 jam untuk kue brownies dan 1 jam untuk bika ambon. Tepung terigu yang tersedia sebanyak 120 kg, tepung tapioca sebanyak 60 kg dan masa kerja karyawan tidak lebih dari 40 jam, berapakah yang harus diproduksi Alea Bakery untuk mendapatkan keuntungan maksimal dengan fungsi tujuannya ($Z = 40x_1 + 30x_2$)?

2. Maksimumkan fungsi $Z = 20x_1 + 25x_2$
Dengan fungsi kendala: $3x_1 + 3x_2 \leq 24$
 $2x_1 + 4x_2 \leq 20$
 $3x_1 \leq 21$
 $x_1, x_2 \geq 0$

3. Perusahaan Aneka Karya akan membuat lemari dan ranjang tidur. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit lemari adalah \$14, dan keuntungan yang diperoleh dari satu unit ranjang tidur adalah \$10. Kendala yang dialami perusahaan Aneka karya adalah keterbatasan jam kerja. Untuk pembuatan satu unit lemari diperlukan waktu 8 jam kerja, sedangkan untuk pembuatan satu unit ranjang tidur diperlukan waktu 6 jam kerja. Untuk pengecatan satu unit lemari dibutuhkan waktu 2 jam sedangkan pengecatan untuk satu ranjang tidur dibutuhkan waktu 1 jam. Jumlah

jam kerja yang tersedia adalah 480 jam per minggu. Sedangkan jumlah jam untuk pengecatan adalah 100 jam per minggu. Berapa jumlah lemari dan ranjang tidur yang harus diproduksi agar perusahaan untuk maksimal?

4. Maksimumkan fungsi $Z = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3$

Dengan fungsi kendala: $x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 15$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13$$

$$5x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$$

$$x_1, x_2, x_3, \geq 0$$

5. Minimumkan fungsi $Z = 20x_1 + 16x_2$

Dengan fungsi kendala: $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 120$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 40$$

$$x_1, x_2, \geq 0$$

D. Referensi

Allen, R. G. D. (1966) Mathematical Economics. New York: St. Martin's Press.

Chiang, Alpha. (2006) Dasar-dasar Matematika Ekonomi. Jakarta: Erlangga.

Dumairy. (2010) Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, BPFE, Yogyakarta.

Hamidah, dkk. (2020) Matematika Ekonomi 1 dan 2 untuk
Analisa Ekonomi, Bisnis dan Ilmu Sosial. Surabaya :
Scopindo Media Pustaka.

Johannes, dkk. (1982) Pengantar Matematika untuk Ekonomi.
Jakarta: LP3ES.

K.I, Majid. (1972) Non-Linear Structures. London : The
Butterworth Group

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Arif, M. Nur Rianto, 2013. "*Matematika Terapan Untuk Ekonomi*". Bandung: Pustaka Setia.
- Allen, R. G. D. (1966) *Mathematical Economics*. New York: St. Martin's Press.
- Amir Tjolleng. 2019. *Matematika Ekonomi*. Bandung : Yrama Widya
- Andi Supangat. 2009. *Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta : Kencana.
- Anthony, M and Norman Biggs (1996). *Mathematics for Economis and Finance Methods and Modelling*. London: Cambridge University Press.
- Chaerani, Diah, dkk, 2020. *Pemodelan Riset Operasi dan Optimisasi*. Sumedang: Alqaprint Jatinangor.
- Chiang, Alpha. (2006). *Dasar-dasar Matematika Ekonomi*. Jakarta: Erlangga.
- Dumairy. 2010. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta : BPFE.
- Dumairy. 2017. "*Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*". Edisi 2003/2004. Cet. 12. Yogyakarta: BPFE.
- Hamidah, dkk. (2020). *Matematika Ekonomi 1 dan 2 untuk Analisa Ekonomi, Bisnis dan Ilmu Sosial*. Surabaya : Scopindo Media Pustaka.
- Indriyati, Mirna. (2009). *Ayo, Belajar Persamaan, Pertidaksamaan, dan Sistem Persamaan Linear!*, Jakarta: PT Sunda Kelapa Pustaka. Hal 21-22.

- Johannes, dkk. (1982). Pengantar Matematika untuk Ekonomi. Jakarta: LP3ES.
- Josep Bintang Kalangi. 2012. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta : Salemba Empat.
- K.I, Majid. (1972) Non-Linear Structures. London : The Butterworth Group
- Kalangi, Josep Bintang. 2012. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta : Salemba Empat.
- Kalangi, Josep Bintang. 2014. *Matematika Ekonomi dan Bisnis Edisi ke-3*. Jakarta: Salemba Empat.
- Kamarullah. (2017). Pendidikan Matematika di Sekolah Kita. Jurnal Al Khawarizmi. 1 (1), 21-32.
- Markonah dan Hedwigis Esti. (2008) Matematika Ekonomi dan Bisnis 1. Jakarta: PT. Gramedia
- Mesra, B. (2016) Penerapan Ilmu Matematika dalam Ekonomi dan Bisnis. Yogyakarta: CV Budi Utama.
- Olivier, J. (2017). Business Math: A Step by Step Handbook. Canada: Creative Commons License (CC BY-NC-SA).
- Prawirosentono, Suyadi. 2019. Riset Operasi & Ekonofisika. Jakarta: Bumi Aksara.
- Putrodjoyo G dan Untung Rahardja. (2015). Matematika Ekonomi. Jakarta: PT. Grasindo.
- Rifa'l Rusdian. (2016). Aljabar Matriks Dasar. Yogyakarta: Deepublish.
- Rinaldi. (2020). Buku Ajar Matematika Ekonomi. Jakarta: FEB Universitas Persada Indonesia.

- Sari, M. K. (2011). Profil kesulitan siswa kelas VIII dalam memecahkan masalah matematika pada materi pokok sistem persamaan linear dua variabel.
- Sessu, A. (2017). Pengantar Matematika Ekonomi. Jakarta: PT Bumi Aksar
- Sillean, S. 2011. "*Matematika Untuk Bisnis dan Ekonomi*". Jakarta: Mitra Wacana Media.
- Sunyoto, Danang. 2007. "*Matematika Ekonomi*". Yogyakarta: Ardana.
- Supangat. Andi. 2006. "*Matematika Terapan Untuk Ekonomi dan Bisnis*". Jakarta: Kencana.
- Wirawan, Nata. 2017. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Denpasar : Keraras Emas.
- Yusuf Yahya, Dkk. 2001. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta : Ghalia Indonesia.